

ANÁLISE DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA DE TRANSIENTE DE
CURTA DURAÇÃO INCLUINDO OS EFEITOS DA
INTERAÇÃO SOLO-FLUIDO-ESTRUTURA

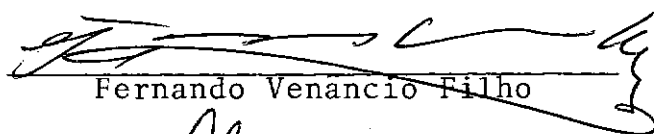
Alvaro Maia da Costa

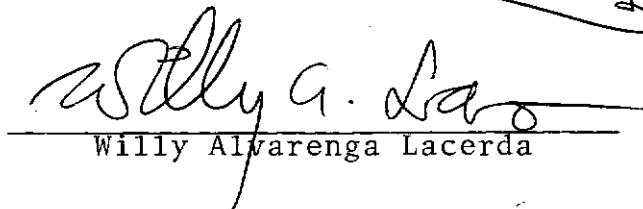
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:


Nelson Francisco Favilla Ebecken
Presidente


Edison Castro Prates de Lima


Fernando Venancio Filho


Willy Alvarenga Lacerda

COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO
DE ENGENHARIA - COPPE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

RESUMOS DE TESES

PROGRAMA:

AUTOR:

TÍTULO DA TESE:

DATA DA DEFESA DE TESE:

ESCOLA DE ORIGEM:

DESTINO:

ENDEREÇO ATUAL:

BANCA EXAMINADORA: _____ (ORIENTADOR)

ENTIDADE MANTENEDORA:

OBSERVAÇÕES:

Nº PÁGINAS -

COMISSÃO DE PUBLICAÇÕES
COPUB

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken pela orientação e amizade.

Ao Professor Paulo Alcântara Gomes como Diretor da COPPE/UFRJ.

Ao Professor Fernando Luiz Lobo Barbosa Carneiro como Coordenador do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ.

Ao Professor Willy Alvarenga Lacerda e ao colega Ernesto Simões Preussler pela colaboração na análise dos resultados relativos ao comportamento dinâmico dos solos.

Ao Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, em especial a Maria Irene Moreira Pereira Melo (Diretora da DAU), Luiz Roberto Braz Tinoco (Chefe da DO), Antonio Juarez Sylvio Menezes de Alencar (Estagiário) e Elenice Praça (Estagiária).

A Monica Lopes Beltrame pela pesquisa bibliográfica.

A Helena Santos de Oliveira pela datilografia.

Ao CNPq e CNEN pelo apoio financeiro.

ABSTRACT

The finite element method is employed in the prediction of the dynamic transient response of structures systems exhibiting material non-linearity. The central difference explicit time marching scheme is adopted for integration of the dynamic equilibrium equation and a diagonal lumped mass matrix is employed with a special procedure applicable to variable nodal points quadrilateral isoparametric elements. The effects of soil-structure interaction are considered and a special fluid element is appreciated. Several problems are presented and conclusions are discussed.

SUMÁRIO

O Método dos Elementos Finitos é utilizado na obtenção da resposta dinâmica elasto-plástica de sistemas estruturais solicitados por transientes de curta duração. O método incremental explícito de diferença central é adotado na integração da equação de equilíbrio dinâmico, empregando-se uma matriz de massa diagonal agrupada, especializada para elementos quadriláteros isoparamétricos com número variado de pontos nodais. Os efeitos da interação solo-estrutura são considerados, implementando-se também um elemento especial de fluido. Diversos problemas são apresentados e conclusões discutidas.

ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO	1
II	- FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINI- TOS	5
	2.1 - Discretização do Contínuo	5
	2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais	11
	2.3 - Integração Numérica	15
	2.4 - Amortecimento Estrutural	17
	2.5 - Diagonalização da Matriz de Massa	18
	2.6 - Algoritmo de Integração no Tempo	19
	2.7 - Estabilidade do Algoritmo de Integração	22
	2.8 - Fluxograma Simplificado do Procedimento de Cál- culo do Algoritmo de Integração Explícita de $\overline{D\dot{I}}$ ferença Central	25
III	- CONCEITOS BÁSICOS DA PLASTICIDADE	28
	3.1 - Lei de Escoamento Plástico	32
	3.2 - Superfície de Escoamento e Unicidade da Solu- ção	42
	3.2.1 - Superfície de Escoamento	42
	3.2.2 - Unicidade da Solução	48
	3.3 - Critérios de Escoamento	48
	3.3.1 - Critério de Escoamento de von Mises ..	49
	3.3.2 - Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb	60
	3.4 - Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb Modifi- cado	69
IV	- MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS IMPLEMENTADOS	80
	4.1 - Formulação Elástica	82
	4.2 - Formulação Elasto-Plástica Associada ao Crité- rio de von Mises	83

4.2.1 - Histórico de Tensões e Deformações para o Modelo Elasto-Plástico de von Mises	96
4.3 - Formulação Elasto-Plástica Associada ao Critério de Mohr-Coulomb	105
4.3.1 - História de Tensões e Deformações para o Modelo Elasto-Plástico de Mohr-Coulomb	113
V - MODELO DE INTERFACE	119
5.1 - Comportamento Físico de Uma Interface	119
5.2 - Modelo Matemático para o Estado Plano de Tensões e Estado Plano de Deformações	127
5.3 - Modelo Matemático para Sólidos Axissimétricos	136
VI - MODELO DE FLUIDO	140
6.1 - Lei Constitutiva	140
6.2 - Amortecimento	141
6.3 - Considerações Gerais	143
VII - RESULTADOS	144
7.1 - Viga Bi-Apoiada	144
7.2 - Chicoteamento de Tubulações (Pipe Whip Problem)	144
7.3 - Calota Esférica Delgada	147
7.4 - Calota Esférica Espessa	148
7.5 - Propagação de Ondas em Meio Fluido	166
7.6 - Ensaio Dinâmico	170
7.7 - Interação Solo-Estrutura	185
VIII - CONCLUSÃO	202
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	207

I - INTRODUÇÃO

O uso do Método dos Elementos Finitos na solução de problemas estruturais não-lineares é agora bem estabelecido. Em particular o comportamento não-linear físico dos materiais e os efeitos provenientes de grandes deslocamentos têm recebido especial atenção. Outras fontes de não-linearidade, principalmente as relacionadas às interações estruturais, têm sido também extensivamente estudadas. Nesta área, geralmente, as pesquisas davam maior enfoque à análise estática, porém recentemente estas mesmas não-linearidades têm sido investigadas quando a natureza do carregamento é dinâmica. Considerações práticas são de grande importância na análise dinâmica de estruturas no que diz respeito à escolha do método de solução a ser utilizado, bem como na avaliação dos resultados obtidos.

Normalmente, grandes estruturas rompem quando submetidas a solicitações dinâmicas súbitas, excepcionalmente elevadas e de curta duração. Estas podem englobar cargas de impacto, explosões, grandes terremotos, etc. Embora a definição exata desses carregamentos possa, algumas vezes, não ser disponível, é responsabilidade do analista estrutural garantir a infalibilidade das obras a estas solicitações, principalmente aquelas cuja ruptura compromete a segurança pública. Dentro desta especificação, pode-se ressaltar a segurança dos vasos de pressão de reatores nucleares, barragens, vasos de contenção química, tubulações de alta pressão, etc.

A grande importância na escolha do método de solução fica ainda mais evidenciada ao se conceber que muitas das solicitações mencionadas anteriormente podem ocorrer em intervalos

de tempo da ordem de micro-segundos e que neste pequeno intervalo, devido ao valor elevado das cargas, há de se esperar o escoamento plástico dos materiais e a geração de grandes deslocamentos.

Em análise dinâmica não-linear os métodos de integração direta no tempo são os mais empregados. Estes se subdividem em: implícitos e explícitos.

A eficiência computacional dos métodos implícitos é atribuída, em parte, à utilização de maiores intervalos de integração no tempo, pois são incondicionalmente estáveis. Nesses métodos o maior esforço computacional, em análise não-linear, reside na atualização da matriz de rigidez global da estrutura, na solução do sistema de equações e iterações de equilíbrio nodal.

Os métodos explícitos são condicionalmente estáveis. Em particular, para o algoritmo de integração explícita de diferença central, a eficiência computacional é comprometida pela exigência de intervalos de integração no tempo, algumas vezes, bem inferiores aos utilizados pelos implícitos. Seu desempenho é beneficiado principalmente por não necessitar da matriz de rigidez global da estrutura, o que elimina os processos de geração, atualização e solução do sistema de equações, bem como não utiliza a cada passo da integração processos iterativos para o estabelecimento do equilíbrio (cap. II, ref. [2.8]). O método de integração explícita de diferença central para a análise não-linear é fortemente recomendado no cálculo de até aproximadamente dois períodos fundamentais da resposta dinâmica, (Zienkiewicz, ref. [2.11]).

O objetivo do presente estudo é a análise dinâmica estrutural pelo Método dos Elementos Finitos em transientes

de curta duração, associados aos modelos estruturais anteriormente citados. Por este motivo, optou-se pelo algoritmo de integração explícita de diferença central. Em tais análises, o esforço computacional adicional deste algoritmo em relação aos implícitos, devido à utilização de pequenos intervalos de tempo, é satisfatoriamente compensado pelo tempo de computação ganho na não realização das operações matriciais já mencionadas. O algoritmo de diferença central mostrou-se também mais eficiente em problemas de solicitações dinâmicas transitórias, pois nestes casos a integração passo-a-passo dever ser feita com pequenos intervalos de tempo, de modo que todos os graus de liberdade sejam excitados durante a aplicação da carga.

Na integração da resposta dinâmica incorpora-se o comportamento não linear físico dos materiais, implementando-se dois modelos elasto-plásticos. O primeiro associado ao critério de von Mises ; o segundo tendo como base o critério de Mohr-Coulomb Modificado, no qual, a não existência de pontos singulares implica na maior efetividade da formulação elasto-plástica e maior eficiência computacional.

Em paralelo ao estudo da não-linearidade física dos materiais, analisa-se também o comportamento hidrodinâmico de fluidos não-viscosos e os problemas relacionados com as descontinuidades de contorno cinemático, para os quais elaborou-se um elemento de interface apropriado ao algoritmo utilizado.

Com os requisitos anteriores, o programa desenvolvido (em linguagem FORTRAN), permite a obtenção de respostas dinâmicas de estruturas de materiais elásticos e elasto-plásticos, incluindo os efeitos da interação solo-fluido-estrutura.

Diversas aplicações ilustram a eficiência computa

cional e precisão conseguidas pelo algoritmo de diferença central, verificando-se o desempenho dos modelos elasto-plásticos e os efeitos da interação estrutural.

II - FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No presente estudo, o Método dos Elementos Finitos é utilizado para discretização do contínuo. As equações diferenciais de equilíbrio dinâmico são obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais e integradas no tempo pelo algoritmo de integração explícita de diferença central. Este algoritmo é utilizado no cálculo da resposta dinâmica elástica e elasto-plástica de três categorias de sistemas estruturais:

- Estado Plano de Tensões
- Estado Plano de Deformações
- Sólidos Axissimétricos

2.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTÍNUO

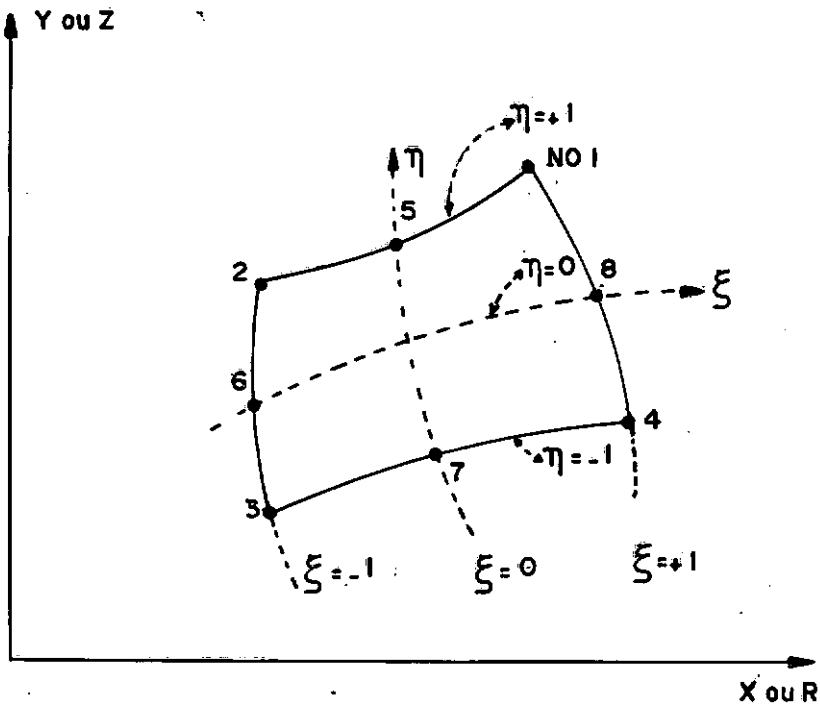
O processo de discretização é efetuado por intermédio de elementos finitos isoparamétricos (com número variado de pontos nodais), elementos de treliça e elementos de interface.

O desenvolvimento matemático apresentado neste Capítulo está voltado diretamente à análise por elementos finitos isoparamétricos, pois os elementos de treliça e interface podem ser introduzidos como casos particulares (Capítulo V).

A partir das características e funções de interpolação do elemento base, Tabela 2.1, pode-se obter o campo de deslocamentos, velocidades e acelerações relativas ao domínio de cada elemento. Estas grandezas são obtidas dos respectivos valores nodais e em notação matricial, podem ser escritas como:

$$\underline{\dot{d}} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{U} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\underline{\ddot{d}} = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{\ddot{U}} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_8 \\ \ddot{v}_8 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$



elemento isoparamétrico bi-dimensional com
número variado de pontos nodais (4 - 8)

INCLUIR SOMENTE SE O NÓ I É DEFINIDO

	I = 5	I = 6	I = 7	I = 8
$N_1 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$	$-\frac{1}{2} N_5$			$-\frac{1}{2} N_8$
$N_2 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$	$-\frac{1}{2} N_5$	$-\frac{1}{2} N_6$		
$N_3 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$		$-\frac{1}{2} N_6$	$-\frac{1}{2} N_7$	
$N_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$			$-\frac{1}{2} N_7$	$-\frac{1}{2} N_8$
$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta)$				
$N_6 = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 - \xi)$				
$N_7 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta)$				
$N_8 = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi)$				

TABELA 2.1

$$\ddot{\underline{d}} = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \ddot{\underline{U}} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_8 \\ \ddot{v}_8 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

onde

- \underline{d} - vetor de deslocamentos no domínio do elemento
- $\dot{\underline{d}}$ - vetor de velocidades no domínio do elemento
- $\ddot{\underline{d}}$ - vetor de acelerações no domínio do elemento
- \underline{N} - matriz de funções de interpolação do elemento
- \underline{U} , $\dot{\underline{U}}$ e $\ddot{\underline{U}}$ - Vetor dos deslocamentos, velocidades e acelerações nodais referidas ao sistema global, (já que se utiliza de elementos isoparamétricos).

Com base nas definições anteriores e na discretização utilizada, o campo de deformações é fornecido por:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ v, x \\ v, y \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Estado Plano de Tensões} \\ \text{Estado Plano de Deformações} \end{matrix} \quad (2.4)$$

\underline{A}

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u,r \\ u,z \\ v,r \\ v,z \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{sólidos Axissimétricos})$$

\underline{A} \underline{u}

(2.5)

Como se faz uso de elementos isoparamétricos, as derivadas dos deslocamentos em relação ao sistema cartesiano são fornecidas em função das derivadas destes deslocamentos em relação ao sistema (ξ, η) , Tabela 2.1:

ESTADO PLANO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

$$\begin{Bmatrix} u,\xi \\ u,\eta \\ v,\xi \\ v,\eta \\ \underline{d},_{\xi,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X,\xi & Y,\xi & 0 & 0 \\ X,\eta & Y,\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X,\xi & Y,\xi \\ 0 & 0 & X,\eta & Y,\eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u,x \\ u,y \\ v,x \\ v,y \\ \underline{d},_{x,y} \end{Bmatrix}$$

$\underline{d},_{\xi,\eta} = \underline{J} \cdot \underline{d},_{x,y} \rightarrow \underline{d},_{x,y} = \underline{J}^{-1} \cdot \underline{d},_{\xi,\eta}$

\underline{J} $\underline{d},_{x,y}$

(2.6)

onde

$$\underline{d},_{\xi,\eta} = \underline{DN} \cdot \underline{U} = \begin{Bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & N_{8,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & N_{8,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & N_{8,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & N_{8,\eta} \end{Bmatrix} \cdot \underline{U}$$

\underline{DN} (2.7)

SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} u, \xi \\ u, \eta \\ v, \xi \\ v, \eta \\ u \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} R, \xi & Z, \xi & 0 & 0 & 0 \\ R, \eta & Z, \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R, \xi & Z, \xi & 0 \\ 0 & 0 & R, \eta & Z, \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} u, r \\ u, z \\ v, r \\ v, z \\ u \end{array} \right\} \\
 \underline{d}, \xi, \eta \qquad \qquad \underline{J} \qquad \qquad \underline{d}, r, z
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \rightarrow \underline{d}, \xi, \eta = \underline{J} \cdot \underline{d}, r, z \\
 \rightarrow \underline{d}, r, z = \underline{J}^{-1} \cdot \underline{d}, \xi, \eta
 \end{array}$$

(2.8)

onde

$$\underline{d}, \xi, \eta = \underline{DN} \cdot \underline{U} = \left\{ \begin{array}{cccccc} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & N_{8,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & N_{8,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & N_{8,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & N_{8,\eta} \\ N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \end{array} \right\} \cdot \underline{U}$$

(2.9)

Em ambos os casos as coordenadas e as respectivas derivadas de um ponto no domínio do elemento são fornecidas por:

$$\begin{array}{c}
 \text{Ref.} \bullet \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \begin{Bmatrix} X \\ \vdots \\ Y \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{X} = \underline{N} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_8 \end{Bmatrix} = \underline{\text{Ref}}_{,\xi,\eta} = \underline{N}_{,\xi,\eta} \cdot \underline{X} \\
 \begin{Bmatrix} R \\ \vdots \\ Z \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{X} = \underline{N} \cdot \begin{Bmatrix} r_1 \\ z_1 \\ r_2 \\ z_2 \\ \vdots \\ r_8 \\ z_8 \end{Bmatrix} = \underline{\text{Ref}}_{,\xi,\eta} = \underline{N}_{,\xi,\eta} \cdot \underline{X}
 \end{array}
 \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Ref.} \bullet \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \begin{Bmatrix} X \\ \vdots \\ Y \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{X} = \underline{N} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_8 \end{Bmatrix} = \underline{\text{Ref}}_{,\xi,\eta} = \underline{N}_{,\xi,\eta} \cdot \underline{X} \\
 \begin{Bmatrix} R \\ \vdots \\ Z \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{X} = \underline{N} \cdot \begin{Bmatrix} r_1 \\ z_1 \\ r_2 \\ z_2 \\ \vdots \\ r_8 \\ z_8 \end{Bmatrix} = \underline{\text{Ref}}_{,\xi,\eta} = \underline{N}_{,\xi,\eta} \cdot \underline{X}
 \end{array}
 \quad (2.11)$$

Com as equações (2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11), o campo de deformações para as três categorias de sistemas estruturais é gerado pelo seguinte produto matricial:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{A} \cdot \underline{J}^{-1} \cdot \underline{DN} \cdot \underline{U} = \underline{B} \cdot \underline{U} \quad (2.12)$$

Com as definições anteriores pode-se aplicar o princípio dos trabalhos virtuais associado ao princípio de D' Alembert para se obter as equações diferenciais de equilíbrio dinâmico do modelo discreto.

2.2 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

As equações de equilíbrio estático de um meio con

tínuo podem ser fornecidas pelo princípio dos trabalhos virtuais, o qual estabelece sobre o domínio do modelo discreto a seguinte equação:

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\sigma} \, dV = \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \underline{f}_V \, dV + \int_S \delta \underline{d}_S^T \cdot \underline{f}_S \, dS + \sum_i \delta U_i F_i \right\}_e \quad (2.13)$$

onde

\underline{f}_V -- forças de volume

\underline{f}_S -- forças de superfície

$\delta U_i, F_i$ - deslocamento nodal virtual e força concentrada nodal respectivamente

$\delta \underline{d}_S^T$ - deslocamentos virtuais particularizados ao contorno.

n - número de elementos

Pelo princípio de D'Alembert esta equação pode ser estendida à análise dinâmica, considerando-se as forças de inércia como forças de volume adicionais (ref. [2.7]).

$$\underline{f}_i = - \rho \cdot \underline{t}_d^{\ddot{}} \quad (2.14)$$

Do mesmo modo, pode-se incluir as forças dissipativas (ref. [2.7])

$$\underline{f}_d = - \underline{t}_k \cdot \underline{t}_d^{\dot{}} \quad (2.15)$$

onde

ρ - massa específica do elemento

\underline{t}_k - parâmetro de amortecimento viscoso do material do elemento.

Com as definições (2.14) e (2.15), tem-se a extensão da equação (2.13) à análise dinâmica:

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{t}_\sigma dV = \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \underline{t}_{f_V} dV + \int_S \delta \underline{d}_S^T \cdot \underline{t}_{f_S} dS - \right. \\ \left. - \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \rho \cdot \underline{t}_{\ddot{d}} dV - \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \underline{t}_k \cdot \underline{t}_{\dot{d}} dV + \sum_i \delta U_i \cdot \underline{t}_{F_i} \right\}_e \quad (2.16)$$

Inserindo-se na equação (2.16), as relações

$$\underline{t}_\varepsilon = \underline{t}_B \cdot \underline{t}_U \rightarrow \delta \underline{\varepsilon} = \underline{t}_B \cdot \delta \underline{U}$$

$$\underline{t}_d = \underline{t}_N \cdot \underline{t}_U \rightarrow \delta \underline{d} = \underline{t}_N \cdot \delta \underline{U}$$

$$\underline{t}_{\dot{d}} = \underline{t}_N \cdot \underline{t}_{\dot{U}}$$

$$\underline{t}_{\ddot{d}} = \underline{t}_N \cdot \underline{t}_{\ddot{U}}$$

$$\sum_i \delta U_i F_i \equiv \delta \underline{U}^T \cdot \underline{t}_F \quad (\text{vetor de forças nodais do elemento})$$

resulta a seguinte equação:

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \int_V \delta \underline{U}^T \cdot \underline{t}_B^T \underline{t}_\sigma dV = \int_V \delta \underline{U}^T \cdot \underline{t}_N^T \cdot \underline{t}_{f_V} dV + \int_S \delta \underline{U}^T \cdot \underline{t}_N^T \cdot \underline{t}_{f_S} dS - \right. \\ \left. - \int_V \delta \underline{U}^T \cdot \underline{t}_N^T \cdot \rho \cdot \underline{t}_N \cdot \underline{t}_{\ddot{U}} dV + \int_V \delta \underline{U}^T \cdot \underline{t}_N^T \cdot \underline{t}_k \cdot \underline{t}_N \cdot \underline{t}_{\dot{U}} dV + \right. \\ \left. + \delta \underline{U}^T \cdot \underline{t}_F \right\}_e \quad (2.17)$$

No presente estudo, apenas a não-linearidade física é considerada. Por este motivo, os arranjos \underline{t}_B^T e \underline{t}_N^T são constantes ao longo do tempo, permitindo escrever:

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \delta \underline{U}^T \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{t}_\sigma dV + \int_V \underline{N}^T \cdot \rho \cdot \underline{N} dV \cdot \underline{t}_{\ddot{U}} + \right. \\ \left. + \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{t}_k \cdot \underline{N} dV \cdot \underline{t}_{\dot{U}} - \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{t}_{f_V} dV - \right. \\ \left. \int_S \underline{N}_S^T \cdot \underline{t}_{f_S} dS - \underline{t}_{f_F} = 0 \right\} \quad e \quad (2.18)$$

onde:

$$\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{t}_\sigma dV = \underline{t}_{R_{re}} \quad - \text{forças nodais internas do elemento}$$

$$\int_V \underline{N}^T \cdot \rho \cdot \underline{N} dV \quad - \text{matriz de massa do elemento}$$

$$\int_V \underline{N}^T \cdot \underline{t}_k \cdot \underline{N} dV = \underline{t}_C \quad - \text{matriz de amortecimento}$$

$$\int_V \underline{N}^T \cdot \underline{t}_{f_V} dV + \int_S \underline{N}_S^T \cdot \underline{t}_{f_S} dS + \underline{t}_{f_F} = \underline{t}_R \quad - \text{Vetor de forças nodais externas do elemento.}$$

O sistema de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico é então dado por:

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \underline{t}_{R_{re}} + \underline{e}_M^T \underline{t}_{\ddot{U}} + \underline{t}_C \cdot \underline{t}_{\dot{U}} = \underline{t}_R \right\} \quad e \quad (2.19)$$

ou

$$\underline{M} \underline{t}_{\ddot{U}} + \underline{t}_C \underline{t}_{\dot{U}} + \underline{t}_{R_{re}} = \underline{t}_R \quad (2.20)$$

O somatório em (2.19) representa a contribuição

de cada elemento na formação do sistema global de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico (refs. [2.3, 2.4, 2.6 e 2.7]) .

2.3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Como se utiliza de elementos isoparamétricos, as integrais de volume e superfície necessárias à obtenção das matrizes que compõem as equações diferenciais de equilíbrio dinâmico, são feitas pela integração numérica de Gauss Legendre (refs. [2.3, 2.4 e 2.7]).

Sendo ξ_i , η_j as coordenadas dos pontos de integração, ω_i e ω_j os pesos associados, as integrais anteriores são calculadas por:

$$\begin{aligned}
 t_{e-re} &= \left\{ \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{t}_\sigma \, dV = \int_{-1}^1 \underline{B}^T \cdot \underline{t}_\sigma \cdot K \cdot \det \underline{J} \cdot d\xi \, d\eta \right\} = \\
 &= \left\{ \sum_{ij} \{ \omega_i \, \omega_j \cdot \underline{B}^T (\xi_i, \eta_j) \cdot \underline{t}_\sigma (\xi_i, \eta_j) \cdot K (\xi_i, \eta_j) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \det \underline{J} (\xi_i, \eta_j) \} \right\}
 \end{aligned}$$

$$e^M = \left\{ \int_V \underline{N}^T \cdot \rho \cdot \underline{N} dV = \int_{-1}^1 \underline{N}^T \cdot \rho \cdot \underline{N} \cdot K \cdot \det \underline{J} \cdot d\xi d\eta \right\} =$$

$$e \left\{ \sum_{ij} \{ \omega_i \cdot \omega_j \cdot \underline{N}^T (\xi_i, \eta_j) \cdot \rho \cdot \underline{N} (\xi_i, \eta_j) \cdot K (\xi_i, \eta_j) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \det \underline{J} (\xi_i, \eta_j) \} \right\}$$

$$e^R = \left\{ \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{t}_{fV} dV + \int_S \underline{N}_S^T \cdot \underline{t}_{fS} dS + \underline{t}_{fF} \right\} =$$

$$e \left\{ \int_{-1}^1 \underline{N}^T \cdot \underline{t}_{fV} \cdot K \cdot \det \underline{J} \cdot d\xi \cdot d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^1 \underline{N}_S^T \cdot \underline{t}_{fS} \cdot K \cdot d\ell \cdot d\phi + \underline{t}_{fF} \right\} =$$

$$e \left\{ \sum_{ij} \omega_i \omega_j \underline{N}^T (\xi_i, \eta_j) \cdot \underline{t}_{fV} (\xi_i, \eta_j) \cdot K (\xi_i, \eta_j) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \det \underline{J} (\xi_i, \eta_j) + \sum_i \{ \omega_i \cdot \underline{N}_S^T (\phi_i) \cdot \underline{t}_{fS} (\phi_i) \cdot K (\phi_i) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot d\ell (\phi_i) \} + \underline{t}_{fF} \right\}$$

onde

- K - é uma variável que assumirá três valores, dependendo do tipo estrutural a ser analisado:
- K = 1 - Estado plano de deformações.
 - K = t - (espessura) - Estado plano de tensões.
 - K = R - (raio do ponto de integração) - sólidos axis simétricos.
- ϕ - Coordenada natural do contorno do elemento.
- $d\ell$ - Comprimento diferencial do contorno.

A regra de integração a ser utilizada depende do número de pontos nodais, da distorção do elemento e do problema em estudo. Sugestões quanto à regra a ser utilizada podem ser encontradas nas refs. [2.3, 2.4, 2.7 e 2.14] .

2.4 - AMORTECIMENTO ESTRUTURAL

No ítem 2.2 o amortecimento estrutural é introduzido na equação do princípio dos trabalhos virtuais como forças de volume adicionais, sendo estas forças dissipativas. A relação entre as forças dissipativas e as velocidades foi introduzida na equação (2.15) com a utilização de um parâmetro t_k , o qual traduz o amortecimento do material, podendo ser o mesmo variável com o tempo, sendo por isto referenciado num dado tempo t .

Na prática é difícil, se não impossível, determinar para um sistema estrutural os parâmetros de amortecimento, em particular, porque estas propriedades são funções da frequência de vibração. Por este motivo, a matriz de amortecimento global não é fornecida pelo acoplamento das diversas matrizes dos elementos, como em (2.20), mas como uma combinação linear da matriz de rigidez e matriz de massa globais (tipo Rayleigh) (refs. [2.3], [2.7]). Devido às características do algoritmo a matriz de rigidez não é gerada, portanto a matriz de amortecimento é consideraa

da proporcional à matriz de massa;

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} \quad (2.21)$$

2.5 - DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA

Como mencionado nas refs. [2.8, 2.10, 2.11 e 2.12] as matrizes de massa agrupadas e diagonais são preferíveis às matrizes de massa consistentes em métodos de integração explícitos, sob o ponto de vista de precisão e eficiência computacional.

Para o elemento isoparamétrico quadrático, adota-se a alternativa proposta por Hinton (ref. [2.13]). Corresponde ao agrupamento de massa, proporcional aos coeficientes da diagonal principal da matriz de massa consistente.

Inicialmente calcula-se os termos da diagonal principal da matriz de massa consistente do elemento, ou seja:

$$M_{2i-1} = \int_V N_i \cdot \rho \cdot N_i \, dV \quad (2.22)$$

$$M_{2i} = \int_V N_i \cdot \rho \cdot N_i \, dV$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Os coeficientes da diagonal principal da matriz de massa diagonalizada são fornecidos por:

$$m_{2i-1} = M_{2i-1} \cdot \frac{M}{\sum M_{2i-1}}$$

$$m_{2i} = M_{2i} \cdot \frac{M}{\sum M_{2i}}$$
(2.23)

onde

m_{2i-1} e m_{2i} - são os elementos da matriz de massa diagonalizada

$$M = \int_V \rho \, dV \quad - \text{ massa do elemento}$$

2.6 - ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO

A integração no tempo do sistema de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico é efetuada pelo algoritmo de integração explícita de diferença central, cujo desenvolvimento teórico é apresentado a seguir.

O sistema global de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico é dado por:

$$\underline{M} \, {}^t\ddot{\underline{U}} + \underline{C} \, {}^t\dot{\underline{U}} + {}^t\underline{R}_{re} = {}^t\underline{R}$$
(2.24)

Em forma expandida:

$$\left\{ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{2N-1} \\ m_{2N} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \vdots \\ \ddot{U}_{2N-1} \\ \ddot{U}_{2N} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2N-1} \\ c_{2N} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_{2N-1} \\ \dot{U}_{2N} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} Re_1 \\ Re_2 \\ \vdots \\ Re_{2N-1} \\ Re_{2N} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{2N-1} \\ R_{2N} \end{array} \right\}$$
(2.25)

onde

N - é o número de pontos nodais do sistema estrutural.

Desenvolvendo-se $\underline{U} = \underline{U}(t)$ em série de Taylor, em torno de um tempo genérico t , tem-se:

$${}^{t+\Delta t}\underline{U} = {}^t\underline{U} + {}^t\dot{\underline{U}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot {}^t\ddot{\underline{U}} \cdot \Delta t^2 \quad (2.26)$$

$${}^{t-\Delta t}\underline{U} = {}^t\underline{U} - {}^t\dot{\underline{U}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot {}^t\ddot{\underline{U}} \cdot (-\Delta t)^2 \quad (2.27)$$

Subtraindo-se (2.27) de (2.26):

$${}^t\dot{\underline{U}} = \frac{1}{2 \Delta t} ({}^{t+\Delta t}\underline{U} - {}^{t-\Delta t}\underline{U}) \quad (2.28)$$

Somando-se (2.27) a (2.26):

$${}^t\ddot{\underline{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\underline{U} + {}^{t-\Delta t}\underline{U} - 2 \cdot {}^t\underline{U}) \quad (2.29)$$

Substituindo-se (2.28) e (2.29) em (2.24) e tomando-se partido do fato do sistema ser desacoplado, pode-se escrever a equação incremental no tempo para cada grau de liberdade:

$${}^{t+\Delta t}U_i = \frac{1}{m_i + c_i \frac{\Delta t}{2}} \left[\Delta t^2 (-{}^tR_{e_i} + {}^tR_i) + 2 m_i {}^tU_i - (m_i - c_i \frac{\Delta t}{2}) {}^{t-\Delta t}U_i \right] \quad (2.30)$$

Estabelecida a equação incremental para um t genérico é necessário determinar a equação particular em $t = 0$, para dar início à integração passo-à-passo.

A equação (2.30) em $t = 0$ se escreve por:

$$\Delta t_{U_i} = \frac{1}{m_i + c_i \frac{\Delta t}{2}} \left[\Delta t^2 (-{}^0Re_i + {}^0R_i) + 2 m_i {}^0U_i - (m_i - c_i \frac{\Delta t}{2}) \cdot \Delta t_{U_i} \right] \quad (2.31)$$

Da equação (2.31) pode-se extrair $-\Delta t_{U_i}$:

$$-\Delta t_{U_i} = \frac{1}{m_i - c_i \frac{\Delta t}{2}} \left[\Delta t^2 (-{}^0Re_i + {}^0R_i) + 2 m_i {}^0U_i - (m_i + c_i \frac{\Delta t}{2}) \cdot \Delta t_{U_i} \right] \quad (2.32)$$

Substituindo-se (2.32) em (2.28) e considerando-se velocidades iniciais, chega-se a:

$$\Delta t_{U_i} = \frac{{}^0\dot{U}_i \cdot 2 \cdot \Delta t (m_i - c_i \frac{\Delta t}{2}) + \Delta t^2 (-{}^0Re_i + {}^0R_i) + 2 m_i {}^0U_i}{2 m_i} \quad (2.33)$$

Frequentemente ${}^0\dot{U} = 0$, então

$$\Delta t_{U_i} = \frac{\Delta t^2 (-{}^0Re_i + {}^0R_i) + 2 m_i {}^0U_i}{2 m_i} \quad (2.34)$$

sendo 0U_i deslocamentos prescritos.

A equação (2.34) também pode ser obtida, anulando-se em (2.24) ${}^0\dot{U}$:

$${}^0\ddot{U}_i = - \frac{{}^0Re_i + {}^0R_i}{m_i} \quad (2.35)$$

Substituindo-se (2.35) na equação (2.29) resulta a mesma equação em (2.34):

$$-\frac{{}^0\text{Re}_i + {}^0\text{R}_i}{m_i} = \frac{1}{\Delta t^2} (\Delta t_{U_i} + \Delta t_{U_i} - 2 {}^0U_i) +$$

$$\Delta t_{U_i} = \frac{\Delta t^2 (-{}^0\text{Re}_i + {}^0\text{R}_i) + 2 m_i {}^0U_i}{2 m_i}$$

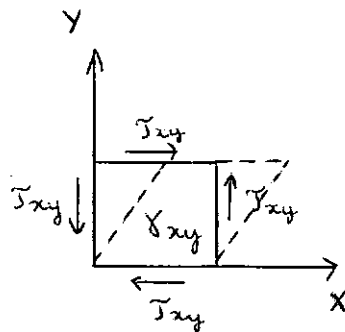
A condição $\Delta t_{U_i} = -\Delta t_{U_i}$ decorre da equação (2.28) quando ${}^0\dot{U} = 0$.

2.7 - ESTABILIDADE DO ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO

Como já mencionado, o algoritmo de integração explícita de diferença central é condicionalmente estável. É bem conhecido que o intervalo de tempo a ser usado corresponde a uma fração do menor período natural da estrutura. Uma estimativa deste intervalo é obtida a partir dos auto-valores e é relacionada ao menor tempo necessário para que ondas se propaguem através do elemento.

Quando um meio contínuo é submetido a uma solitação dinâmica, é gerado em seu domínio um campo de deformações, onde cada componente está associada a um tipo particular de onda. A medida da velocidade de propagação dessas ondas (Fig. 2.1) é utilizada na análise do intervalo crítico. Para o presente estudo pode-se destacar dois tipos:

$$\text{Ondas Cisalhantes (Velocidade } C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}) \quad (2.36)$$



$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

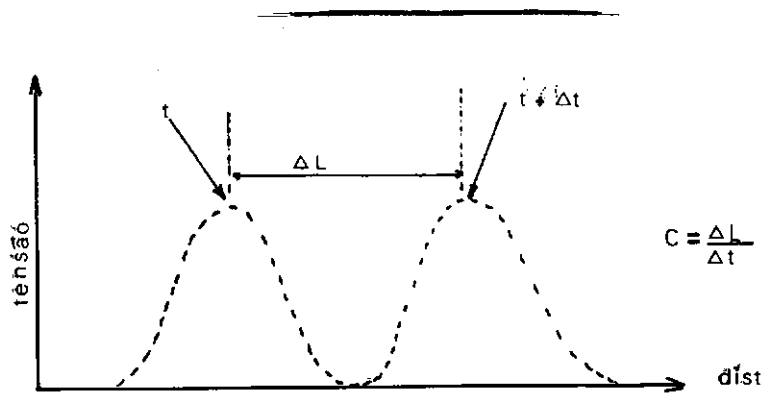
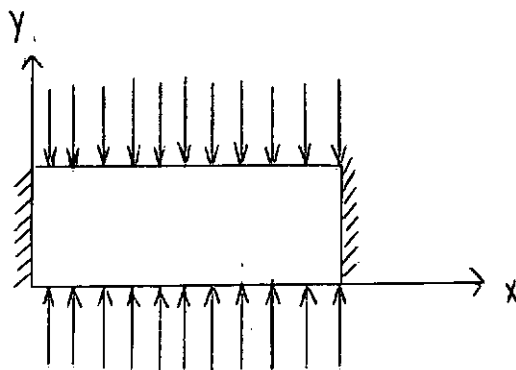


FIG. 2.1

Ondas dilatacionais (velocidade $C_D = \sqrt{\frac{D}{\rho}}$) (2.37)

$$D = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$



onde,

ρ - massa específica

E - módulo de Young

ν - coeficiente de Poisson

De posse destas velocidades, escolhe-se a maior, que fornecerá o menor tempo de propagação e por conseguinte o intervalo crítico de integração (ref. [2.11]).

Sendo $C_D > C_S$, o intervalo crítico a ser usado em respostas dinâmicas elásticas é fornecido por:

$$\Delta t_c = \gamma' \frac{\Delta L}{C_D} = \gamma' \Delta L \sqrt{\frac{\rho (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{E (1 - \nu)}} \quad (2.38)$$

onde,

γ' - é um parâmetro menor do que 1 e

ΔL - é a menor distância entre dois pontos nodais adjacentes.

Na ref. [2.15] o valor do parâmetro γ' é sugerido variar de 0,9 a 1 para elementos lineares e de 0,2 a 0,6 para elementos quadráticos. Considerações semelhantes podem ser encontradas na ref. [2.11] e outros. Na ref. [2.7], o intervalo crítico é também analisado, porém utilizando um desenvolvimento matemático mais elaborado.

A estabilidade numérica de respostas dinâmicas elasto-plásticas é um problema muito mais complexo, pois a propagação de ondas em meios elasto-plásticos, além de depender do material, é também função do critério de plasticidade e outras características intrínsecas ao modelo utilizado. Por este motivo, na literatura, poucos comentários são feitos a este respeito, porém

nas refs. [2.15 e 2.11] e no presente estudo, o intervalo crítico fornecido pela expressão (2.38) mostrou-se satisfatório em análises de transientes curtos.

É importante observar que frequentemente a instabilidade numérica de métodos explícitos na análise de materiais elásticos é facilmente detectada pelo rápido crescimento dos deslocamentos e velocidades, porém em materiais elasto-plásticos tal ocorrência pode ser mascarada. A energia gerada por uma instabilidade pode ser rapidamente dissipada quando os materiais se plastificam. (ref. [2.8]). Tal fato pode conduzir a um campo de deslocamentos com alto percentual de erro, sem ser detectado pelo usuário. Para evitar tal problema, pode-se garantir a estabilidade do método verificando-se o balanço de energia envolvido no movimento vibratório do sistema estrutural. (ref. [2.8]). Tal verificação no presente estudo não foi incluída, pois compromete a eficiência computacional, fugindo aos objetivos iniciais do trabalho. Preferiu-se, portanto, utilizar como intervalos de integração valores abaixo do crítico obtido pela expressão (2.38).

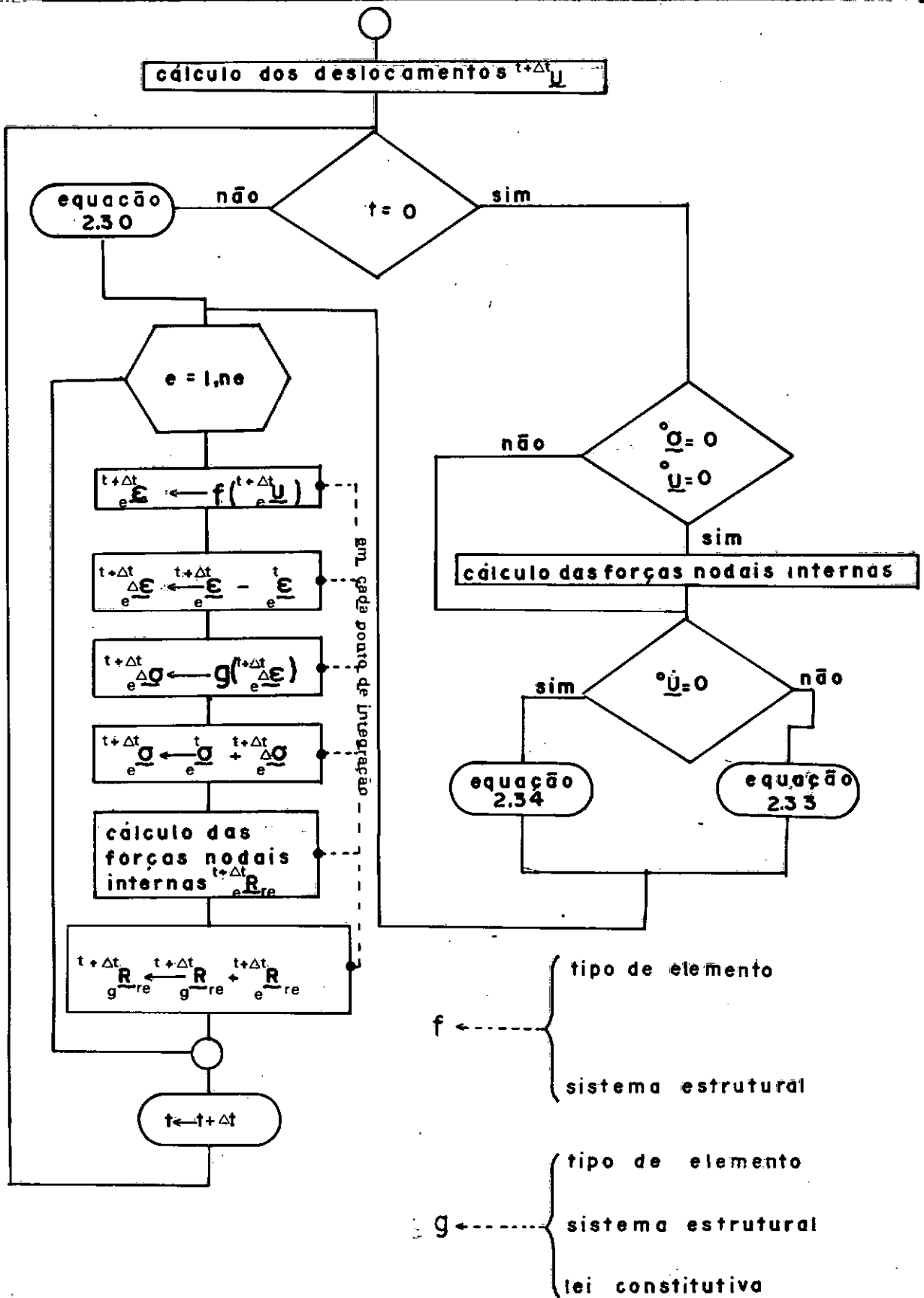
2.8 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROCEDIMENTO DE CÁLCULO DO ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO EXPLÍCITA DE DIFERENÇA CENTRAL

A eficiência computacional do algoritmo de integração explícita de diferença central, adaptado à análise não-linear, reside principalmente nas seguintes características:

- a) A matriz de rigidez global da estrutura não é gerada, nem triangularizada
- b) A numeração dos pontos nodais não precisa obedecer a nenhum critério, pois não há necessidade do conhecimento dos parâmetros associados à solução do sistema de equações.

- c) Os arranjos globais são vetores somente, o que implica em economia de área de memória
- d) Em particular, como não se analisa a não-linearidade geométrica, pode-se criar áreas de trabalho que armazenem as matrizes constantes ao longo do tempo, ou seja, \underline{B} , \underline{N} , \underline{M} e \underline{C} e outras características do processo de integração.
- e) Como o intervalo de integração é suficientemente pequeno, dispensa-se o uso de iterações para correção do equilíbrio.
- f) O algoritmo permite a elaboração de um esquema lógico que facilmente atende às características de modularização da programação, o que garante adaptações e ampliações eficientes ao programa.

A seguir apresenta-se um fluxograma simplificado das etapas principais de cálculo:



III - CONCEITOS BÁSICOS DA PLASTICIDADE

Muitos anos de estudos têm sido dedicados à análise do comportamento plástico dos materiais. Desde a elaboração dos primeiros conceitos básicos da teoria da plasticidade, (Coulomb, 1773; Rankine, 1853; Tresca, 1864; von Mises, 1913 e outros), esta tem como responsabilidade básica preencher duas lacunas principais:

A primeira, construir relações explícitas entre tensões e deformações compatíveis e próximas às observações experimentais.

A segunda, desenvolver técnicas matemáticas para calcular os estados de tensões e deformações de um sólido deformado plasticamente segundo um carregamento qualquer.

As técnicas em muito têm evoluído com o decorrer do tempo, porém os conceitos fundamentais utilizados como subsídio matemático são praticamente inalteráveis.

A utilização do método dos elementos finitos, em particular de elementos isoparámetros, deu um rápido impulso na aplicabilidade da teoria da plasticidade. Como consequência do alcance desta técnica matemática, vários modelos elasto-plásticos têm sido adaptados aos recursos numéricos disponíveis. Esta adaptação é normalmente apresentada, em grande parte das publicações, de forma muito compacta e objetiva, não se detendo em salientar os conceitos na qual é fundamentada. Este Capítulo, portanto, pretende ser uma introdução teórica à implementação dos modelos elasto-plásticos utilizados.

Todo o desenvolvimento matemático apresentado a seguir utiliza a notação matricial em substituição à notação tensorial tradicionalmente empregada. Apresenta-se a seguir os ve-

tores correspondentes aos estados de tensões e deformações e a equivalência entre as duas notações.

ESTADO DE TENSÕES
NOTAÇÃO MATRICIAL

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \rightarrow \underline{d\sigma} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

NOTAÇÃO TENSORIAL

$$\sigma_{ij} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{21} \ \sigma_{13} \ \sigma_{31} \ \sigma_{23} \ \sigma_{32}\}$$

onde

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} ; \ \sigma_{23} = \sigma_{32} ; \ \sigma_{13} = \sigma_{31}$$

DEFORMAÇÕES NOTAÇÃO MATRICIAL

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \rightarrow d\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

NOTAÇÃO TENSORIAL

$$\epsilon_{ij} = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{21} \ \epsilon_{13} \ \epsilon_{31} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{32}\}$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} \ ; \ \epsilon_{13} = \epsilon_{31} \ ; \ \epsilon_{23} = \epsilon_{32}$$

EQUIVALÊNCIA ENTRE AS NOTAÇÕES

$$\sigma_{11} = \sigma_x$$

$$\sigma_{22} = \sigma_y$$

$$\sigma_{33} = \sigma_z$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau_{xz}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \tau_{yz}$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_x$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_y$$

$$\epsilon_{33} = \epsilon_z$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \epsilon_{yz} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx} \\ \gamma_{xz} = \epsilon_{xz} + \epsilon_{zx} \\ \gamma_{yz} = \epsilon_{yz} + \epsilon_{zy} \end{array}$$

$$\sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \sigma_{33} \epsilon_{33} + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{21} \epsilon_{21} +$$

$$\sigma_{13} \epsilon_{13} + \sigma_{31} \epsilon_{31} + \sigma_{23} \epsilon_{23} + \sigma_{32} \epsilon_{32} =$$

$$\sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \sigma_{33} \epsilon_{33} + \sigma_{12} (\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) +$$

$$\sigma_{13} (\epsilon_{13} + \epsilon_{31}) + \sigma_{23} (\epsilon_{23} + \epsilon_{32}) = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y +$$

$$\sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} = \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\epsilon}$$

3.1 - LEI DE ESCOAMENTO PLÁSTICO

Na descrição do comportamento dos materiais (ref. [3.29]), a grande dificuldade reside em obter as definições que permitem a formulação matemática das relações tensão x deformação.

No presente estudo apenas pequenas deformações são consideradas, restringindo-se à classe dos materiais estáveis, (ref. [3.9]), com comportamento elasto-plástico. Na Fig. 3.1 é mostrada uma possível curva (tensão x deformação) de um ensaio uniaxial, onde se pode constatar as regiões de estabilidade e instabilidade do material. A existência do ponto de tensão de escoamento máxima é uma demonstração convincente da instabilidade do material. Portanto se materiais elasto-plásticos estáveis são especificados, as relações (tensão x deformação) na região de instabilidade devem receber um tratamento particular. Como na formulação elasto-plástica utiliza-se a teoria matemática da plasticidade, ressalta-se ainda, que uma de suas hipóteses simplificadoras estabelece a independência entre o tempo e as propriedades dos materiais, quando sob condições isotérmicas à temperatura ambiente. Esta hipótese implica em que o estado final de deformações é independente do tempo de aplicação da história de carregamento.

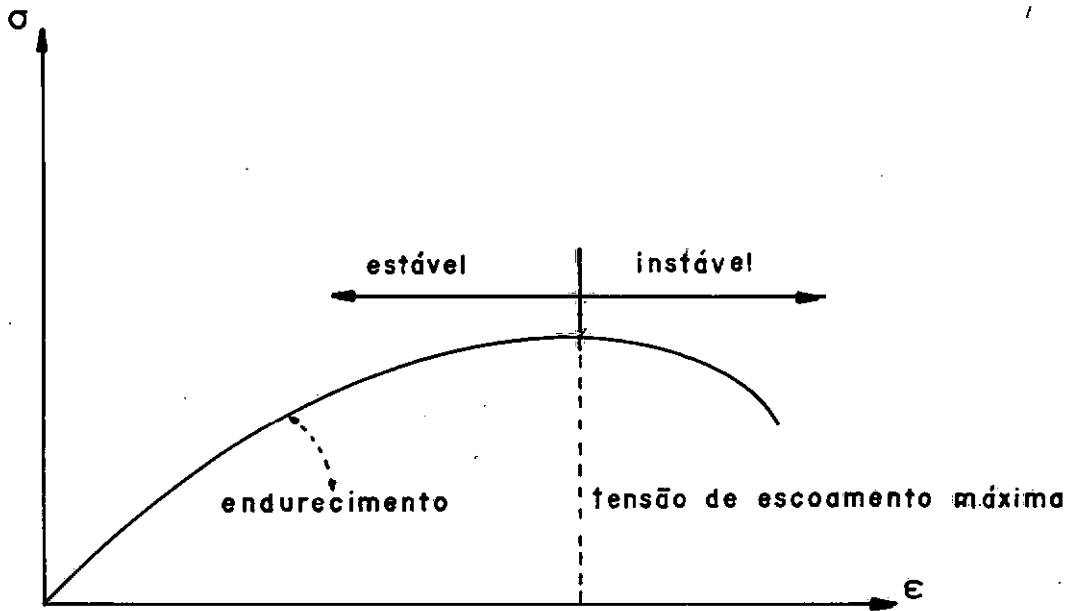


FIG. [3.1]

As deformações plásticas geradas no escoamento plástico de alguns materiais são definidas matematicamente segundo uma lei de escoamento que tem sido estudada por dois enfoques principais:

- No primeiro os incrementos infinitesimais de deformações plásticas são proporcionais ao gradiente de uma função W , denominada de potencial plástico, a qual pode ser dependente do estado de tensões e da história de deformações plásticas (ref. [3.2]). Conforme a definição matemática de W , pode-se ter lei de escoamento associativa e não-associativa sendo a última, em geral, determinada experimentalmente.
- No segundo, a lei de escoamento é definida com base na aproximação unificada devida a Drucker (ref. [3.6]), que é idêntica à lei de escoamento associativa do enfoque anterior. A equivalência da lei de escoamento associativa do primeiro enfoque com a aproximação de Drucker é apresentada a seguir, através do tratamento matemático utilizado por Drucker (refs. [3.3, 3.5 e 3.6]).

Dois tipos de comportamento são estudados:

- O primeiro associado aos materiais que sofrem endurecimento durante a plastificação, conhecidos por "Work-Hardening Materials".
- O segundo caracterizado pelos materiais que não sofrem tal efeito físico e são conhecidos como plástico-perfeitos, cuja lei de escoamento é deduzida como o caso particular dos "WHM", apresentada no final deste item.

O conceito de trabalho de endurecimento, que intrinsecamente classifica o material como estável, pode ser expresso em termos do trabalho feito por um agente externo ao aplicar e remover lentamente um conjunto adicional de tensões, conduzindo às seguintes condições:

- O trabalho realizado pelo agente externo durante a aplicação do conjunto de tensões é positivo
- O trabalho plástico ou irreversível durante a aplicação e remoção das tensões é nulo ou positivo.

Sendo $d\sigma$ o incremento de tensões em um ponto qualquer de um corpo homogêneo e $d\epsilon$ o respectivo incremento de deformações, as condições do trabalho de endurecimento podem ser equacionadas por:

$$d\sigma^T \cdot d\epsilon > 0 \quad (3.1)$$

mas

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \rightarrow$$

$$d\sigma^T \cdot d\epsilon = d\sigma^T (d\epsilon^e + d\epsilon^p) > 0$$

e

$$d\sigma^T \cdot d\epsilon^p \geq 0 \quad (3.2)$$

(a igualdade é satisfeita para $d\epsilon^P = 0$ (ref. [3.5]), onde:

$d\epsilon^e$ - incremento de deformações elásticas

$d\epsilon^P$ - incremento de deformações plásticas

Com as inequações (3.1) e (3.2) pode-se estabelecer a lei de escoamento, por se associar às mesmas as seguintes hipóteses:

A) Uma função de carregamento existe. A cada estágio da deformação plástica uma função $f(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}^P)$ existe de tal modo que, deformações plásticas ocorrem quando $f(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}^P) > K(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}^P)$, onde K é a função de escoamento do material. As funções f e K podem depender do estado de tensões e da história de deformações plásticas, permitindo escrever:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\sigma} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{\epsilon}^P} d\underline{\epsilon}^P \quad (3.3)$$

e

$$dK = \frac{\partial K^T}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\sigma} + \frac{\partial K^T}{\partial \underline{\epsilon}^P} d\underline{\epsilon}^P \quad (3.4)$$

Como em um descarregamento $f(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}^P) < K$ e K permanece com seu último valor atualizado, tem-se que:

$$dK = 0, \text{ com } d\epsilon^e \neq 0 \text{ e } d\epsilon^P = 0 \quad (3.5)$$

Com esta condição:

$$0 = \frac{\partial K^T}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\sigma} + \frac{\partial K^T}{\partial \underline{\epsilon}^P} d\underline{\epsilon}^P$$

onde

$$d\epsilon^P = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial \sigma} = 0 \rightarrow K = K(\epsilon^P) \quad (3.6)$$

Restringindo-se o estudo a materiais isotrópicos, (ref.[3.5]), f é função somente do estado de tensões, reduzindo a equação (3.3) a:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma, \text{ pois } f = f(\sigma) \quad (3.7)$$

A imposição $f(\sigma) > K$ para ocorrência de deformações plásticas, pode ser escrita com mais rigor da seguinte forma (ref. [3.4]):

$$d\epsilon^P = 0 \text{ se } f < K \text{ ou } f = K \text{ e } df \leq 0 \quad (3.8)$$

$$[d\epsilon^P] > 0 \text{ se } f = K \text{ e } df > 0 \quad (3.9)$$

Para um material sem endurecimento:

$$d\epsilon^P = 0 \text{ se } f < K \text{ ou } f = K \text{ e } df < 0 \quad (3.10)$$

$$[d\epsilon^P] > 0 \text{ se } f = K \text{ e } df = 0 \quad (3.11)$$

B) A relação entre o incremento infinitesimal de deformações plásticas e tensões é linear:

$$d\tilde{\varepsilon}^P = D_{\tilde{p}} \cdot d\tilde{\sigma} \quad (3.12)$$

onde

$D_{\tilde{p}}$ - pode ser função do estado de tensões e história de deformações plásticas.

Com base nesta segunda hipótese, é válido o princípio da superposição, ou seja, a soma dos incrementos de deformações plásticas obtidas por dois incrementos de tensões independentes, $d\tilde{\sigma}'$ e $d\tilde{\sigma}''$ (nenhum constituindo descarregamento), é a mesma que a deformação plástica devido ao incremento de tensões

$$d\tilde{\sigma} = d\tilde{\sigma}' + d\tilde{\sigma}'' \quad (3.13)$$

onde

$$\frac{\partial f^T}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}' \geq 0$$

e

$$\frac{\partial f^T}{\partial \tilde{\sigma}} \cdot d\tilde{\sigma}'' \geq 0$$

Para um material dotado de trabalho de endurecimento durante o processo de plastificação, um carregamento ocorre quando $\frac{\partial f^T}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} > 0$ (ineq.(3.8),(3.9)) e um descarregamento ocorre quando $\frac{\partial f^T}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} < 0$. Entre estas duas situações existe uma condição limite, na qual $\frac{\partial f^T}{\partial \tilde{\sigma}} \cdot d\tilde{\sigma} = 0$, que estabelece a continuidade na solução elasto-plástica (ref. [3.4]).

Esta condição de continuidade e a relação linear entre(tensão x deformação) permite que um incremento de ten-

sões qualquer $d\tilde{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} > 0 \right)$ possa ser decomposto em:

$$d\tilde{\sigma} = d\tilde{\sigma}' + d\tilde{\sigma}''$$

de tal modo que $d\tilde{\sigma}'$ não produza deformações plásticas e $d\tilde{\sigma}''$ seja proporcional ao gradiente da função de carregamento f .

$$d\tilde{\sigma} = d\tilde{\sigma}' + d\tilde{\sigma}''$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}' = 0 \quad (3.14)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}'' > 0 \quad \text{com} \quad d\tilde{\sigma}'' = r \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \quad \text{e} \quad r > 0 \quad (3.15)$$

Da equação (3.15)

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \cdot r \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} > 0$$

sendo o mesmo igual a $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}$, segue então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} &= \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \cdot r \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \rightarrow \\ r &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}} \quad (3.16) \end{aligned}$$

A equação (3.16) prova que a decomposição proposta é possível.

Como $d\sigma'$ não produz deformações plásticas, a equação (3.12) pode ser reescrita assumindo-se a relação direta entre $d\varepsilon^P$ e $d\sigma''$ (ref. [3.3]):

$$d\varepsilon^P = \bar{D}_p \cdot d\sigma'' \quad (3.17)$$

Substituindo-se (3.15) em (3.17), tem-se:

$$d\varepsilon^P = \bar{D}_p \cdot r \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \underbrace{\bar{D}_p \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}}_{\bar{h}} \cdot r \rightarrow$$

$$d\varepsilon^P = \bar{h} \cdot r \quad (3.18)$$

Observando-se a equação (3.18), conclui-se que todos os coeficientes de $d\varepsilon^P$ são proporcionais a r , o que permite escrever:

$$d\varepsilon^P = \underline{g} \cdot \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \cdot d\sigma \quad (3.19)$$

onde

$$\underline{g} = \underline{h} \cdot \frac{1}{\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (3.20)$$

Tratando-se de materiais dotados de trabalho de endurecimento, retoma-se a equação (3.2), porém utilizando-se a decomposição de $d\sigma$:

$$(d\sigma' + d\sigma'')^T d\varepsilon^P \geq 0 \quad (3.21)$$

Mas $d\sigma'$ não produz deformações plásticas, então

$$d\sigma = C \cdot d\sigma' + d\sigma''$$

(para qualquer valor de C), produzirá o mesmo incremento de deformações plásticas. Pode-se portanto reescrever a inequação (3.21) do seguinte modo:

$$(C d\sigma' + d\sigma'')^T d\varepsilon^P \geq 0 \quad (3.22)$$

Uma escolha arbitrária de C (negativo) poderia violar a inequação (3.22), o que implica em:

$$d\sigma'^T d\varepsilon^P = 0 \quad (3.23)$$

mas

$$\begin{aligned} d\varepsilon^P &= g \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \cdot d\sigma \rightarrow \\ d\sigma'^T \cdot g \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \cdot d\sigma &= d\sigma'^T \cdot g \cdot df = 0 \rightarrow \\ d\sigma'^T \cdot g &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comparando-se a equação (3.14) com a equação (3.24), chega-se a definição final de $d\varepsilon^P$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \cdot d\sigma' &= 0 \\ d\sigma'^T \cdot g &= 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{g} = G \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.25)$$

onde

G pode depender do estado de tensões e história de deformações plásticas.

Levando-se (3.25) em (3.19) obtém-se a lei de escoamento associativa:

$$d\underline{\epsilon}^P = G \cdot \frac{\partial f^T}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.26)$$

$$d\underline{\epsilon}^P = G \cdot df \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

onde

$$G df = d\lambda \quad (\text{escalar inteiro e positivo})$$

$$d\underline{\epsilon}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.27)$$

A proporcionalidade entre o incremento infinitesimal de deformações plásticas e o gradiente da função de carregamento, definida em (3.27), foi deduzida para o material dotado de trabalho de endurecimento. Agora, apresenta-se a particularização da equação (3.2) para um material plástico-perfeito, conduzindo a definição de $d\underline{\epsilon}^P$.

O comportamento plástico-perfeito, em um ensaio uniaxial, é caracterizado por uma linha horizontal no diagrama tensão-deformação (ref. [3.31]). Para um estado tridimensional de tensões, o comportamento plástico-perfeito implica em que o trabalho realizado por um agente externo, o qual lentamente aplica

e remove um conjunto de tensões, $\bar{\epsilon}$ zero no ciclo de equilíbrio . Esta condição, matematicamente, pode ser escrita por

$$d\sigma^T \cdot d\epsilon^P = 0 \quad (3.28)$$

o que é a particularização da equação (3.2), com $d\epsilon^P \neq 0$.

Como apresentado em (3.10) e (3.11)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \cdot d\sigma = 0 \quad (3.29)$$

comparando-se as equações (3.28) e (3.29), conclui-se:

$$d\epsilon^P = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.30)$$

Como demonstrado anteriormente a aproximação devido a Drucker define os incrementos de deformações plásticas como sendo proporcionais ao gradiente da função de carregamento. Logo se no primeiro enfoque a função de potencial plástico w for igual à função de carregamento do material (ref. [3.2]), ambos os estudos coincidem, constituindo a lei de escoamento associativa dos materiais.

No presente estudo emprega-se a lei de escoamento associativa, porém para alguns materiais torna-se necessário avaliar funções de potencial plástico condizentes com resultados experimentais (ref. [3.24]).

3.2 - SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO E UNICIDADE DA SOLUÇÃO

3.2.1 - Superfície de Escoamento

A equação $f(\sigma) = K$ gera uma superfície conheci-

da como superfície de "escoamento", o que no caso mais geral, constitui uma região do espaço hexa-dimensional Euclidiano. Esta região é na realidade o lugar geométrico dos estados de tensões que plastificam o material.

Como consequência da lei associativa de escoamento e da irreversibilidade do trabalho plástico, conclui-se que esta superfície é convexa (ref. [3.3, 3.2]), como será discutido a seguir.

Seja um ponto material em regime elástico caracterizado por um estado de tensões $\underline{\sigma}_0$, pertencente ao interior da superfície de escoamento (Figura 3.2).

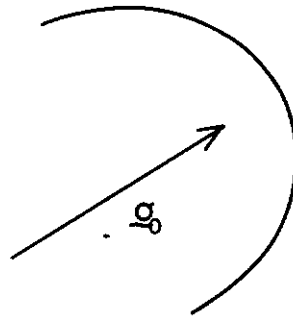


FIG. [3.2]

Supõe-se que sob a ação de um agente externo, este estado de tensões evolui para um estado de tensões $\underline{\sigma}_1$ sobre a superfície de escoamento (Fig. 3.3). Pela proposição (3.9), durante esta trajetória ocorrem apenas deformações elásticas, pois para todos os estados de tensões intermediários $\underline{\sigma}$ entre $(\underline{\sigma}_0$ e $\underline{\sigma}_1)$, $f(\underline{\sigma}) < K$.

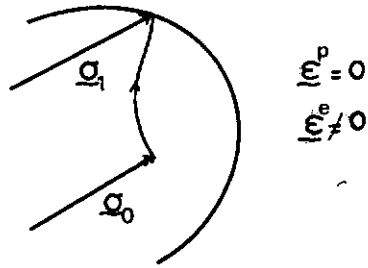


FIG. [3.3]

Se o mesmo agente externo, ou um outro qualquer, submete este mesmo ponto a um incremento infinitesimal de tensões $d\sigma$ de tal modo que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{\sigma_1}^T \cdot d\sigma$$

seja maior do que zero, tem-se a geração de deformações plásticas infinitesimais $d\epsilon^p$ e a realização de trabalho plástico irreversível pelo estado de tensões σ_1 e pelo incremento $d\sigma$ (Fig. 3.4).

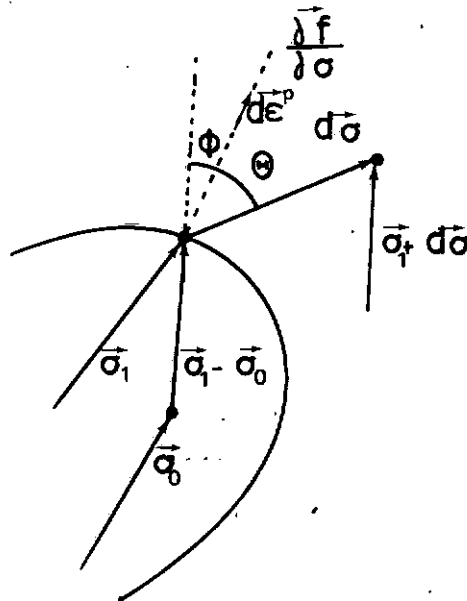


FIG. [3.4]

Após o descarregamento do estado $\vec{\sigma}_1 + d\vec{\sigma}$ para $\vec{\sigma}_0$, o trabalho irreversível total realizado no ciclo é dado por:

$$\delta\omega^P = (\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_0)^T d\underline{\epsilon}^P + d\underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\epsilon}^P$$

Por observação da representação vetorial na Fig. 3.4, o trabalho plástico total pode ser reescrito como o produto escalar dos vetores $(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_0)$, $d\vec{\epsilon}^P$ e $d\vec{\sigma}$, ou seja:

$$S\omega^P = \|(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_0)\| \cdot \|d\vec{\epsilon}^P\| \cdot \cos \phi + \|d\vec{\sigma}\| \cdot \|d\vec{\epsilon}^P\| \cdot \cos \theta \quad (3.31)$$

Da definição dos materiais dotados de trabalho de endurecimento, tem-se:

$$d\underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\epsilon}^P \geq 0 \rightarrow \|d\vec{\sigma}\| \cdot \|d\vec{\epsilon}^P\| \cdot \cos \theta > 0 \rightarrow$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}^T \cdot d\underline{\sigma} > 0$$

O valor $\theta = \frac{\pi}{2}$ satisfaz a condição de continuidade (ítem 3.1, ref. [3.4]) ou decorre do material ser plástico-perfeito.

Por imposição física $\delta\omega^P \geq 0$ (Fig. 3.5), o que implica em

$$\|(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_0)\| \cdot \|d\vec{\epsilon}^P\| \cdot \cos \phi \geq 0$$

pois a norma $\|(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_0)\|$ pode ser feita sempre maior que a norma $\|d\vec{\sigma}\|$ e violar a condição física.

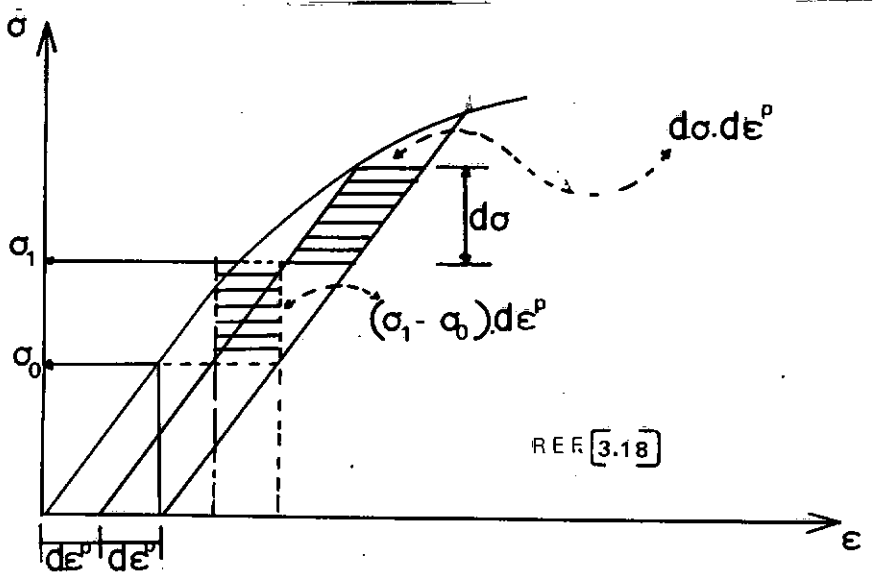


FIG. [3.5]

Portanto, retomando-se a inequação

$$\|(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_0)\| \cdot \|d\vec{\epsilon}^p\| \cos \phi \geq 0$$

conclui-se que $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, o que indica o vetor $\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_0$ fazer um ângulo agudo com o vetor $d\vec{\epsilon}^p$, para qualquer escolha de $\vec{\sigma}_0$. Por conseguinte, o estado de tensões $\vec{\sigma}_0$ deve encontrar-se de um lado de um plano normal a $d\vec{\epsilon}^p$ e como $d\vec{\epsilon}^p$ é normal a superfície de escoamento, este plano é tangente a superfície de escoamento (Fig. 3.6). Pela generalidade de (3.18), esta conclusão deve ser válida para qualquer estado de tensões σ_1 , logo nenhum vetor $\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_0$ pode cortar a superfície de escoamento segundo uma direção que a intercepte em mais do que um ponto. Prova-se assim que a superfície de escoamento é convexa. (ref. [3.3]).

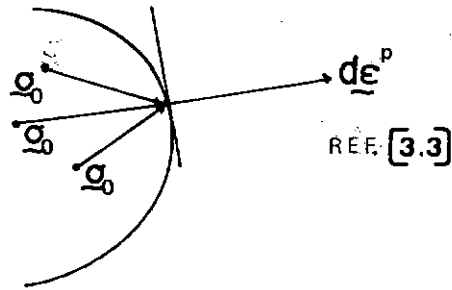


FIG. [3.6]

A confirmação da convexidade da superfície de escoamento pode ser feita por absurdo (ângulo $\phi > \frac{\pi}{2}$, ref. [3.3]).

O fato da superfície de escoamento ser convexa, não impede que esta seja dotada de pontos singulares, onde o gradiente da função de carregamento é indeterminado (Fig. 3.7).

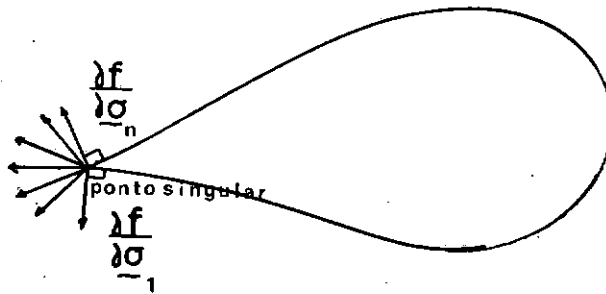


FIG. [3.7]

Quando a formulação elasto-plástica utiliza lei de escoamento plástico associativa, os pontos singulares introduzem a não unicidade nos incrementos de deformações plásticas. Para solucionar este problema, adotam-se simplificações numéricas, as quais são compatíveis aos modelos e restrições matemáticas mais elaboradas, como o estudo apresentado por Koiter (ref. [3.14]) .

3.2.2 - Unicidade da Solução

As relações (tensão x deformação plástica) são dependentes do estado de tensões e da história do carregamento, o qual condiciona a história de deformações plásticas. Por este motivo, uma primeira exigência quanto à unicidade da solução é a descrição exata da história do carregamento. Ainda sob o ponto de vista matemático, é necessário provar-se que para uma dada história de carregamento existe uma e somente uma solução no que diz respeito ao campo de deformações e estado de tensões.

A demonstração da unicidade parte do princípio que para um dado carregamento existem duas soluções. Estas são provadas serem iguais pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais sobre o estado de tensões e deformações correspondente à diferença entre ambas.

Este tratamento matemático é apresentado nas refs. [3.4, 3.8, 3.9].

3.3 - CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

Como mencionado no item 3.1, o comportamento plástico de um material sujeito a um estado multiaxial de tensões é controlado pela equação $f(\underline{\sigma}) = K$. Na realidade esta equação determina qual combinação de tensões causará plastificação no

material e é denominada de critério de escoamento. Considerável trabalho tem sido feito para obtenção dos critérios de escoamento associados a diversos materiais. Dentre os mais conhecidos pode-se citar:

Rankine, Sain-Venant, Tresca, Beltrami, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker & Prager, etc.

Alguns dos critérios anteriores foram abandonados devido a pequena validade experimental, porém os critérios de von-Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager têm recebido especial atenção, principalmente quando as suas aplicações foram ampliadas pelos métodos numéricos atualmente existentes.

3.3.1 - Critério de Escoamento de von Mises

Von Mises sugeriu que o material começa a se deformar plasticamente quando o segundo invariante de tensões desviatórias alcança um valor crítico (ref. [3.2]). A interpretação física, sugerida por Hencky (ref. [3.22]), é que o escoamento do material tem início quando a energia de distorção elástica alcança um valor crítico (ref. [3.2]). Na ref. [3.3], o valor crítico da energia de distorção é dita ser igual à energia de distorção do material quando este é submetido a um estado uniaxial de tensões. Tal consideração resulta na seguinte equação:

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_y^2 \quad (3.32)$$

onde

σ_y - tensão de escoamento do estado uniaxial de tensões

J_2 - segundo invariante de tensões desviatórias

O segundo invariante de tensões desviatórias é dado por:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (3.33)$$

ou

$$J_2 = 0.50 (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (3.34)$$

onde

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m ; S_y = \sigma_y - \sigma_m ; S_z = \sigma_z - \sigma_m ; \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (3.35)$$

Comparando a equação (3.32) com a equação $f(\underline{\sigma})=K$ apresentada no item 3.1, pode-se concluir que no início do escoamento:

$$f(\underline{\sigma}) = J_2 \quad \text{e} \quad K_0 = \frac{1}{3} \sigma_y^2$$

onde

K_0 valor inicial da função de escoamento, (quando $\underline{\epsilon}^P = 0$).

Para este critério a tensão hidrostática ou esférica não causa escoamento, pois a tensão esférica produz somente energia elástica de compressão em materiais isotrópicos (ref. [3.2]). Em consequência do escoamento ser independente da tensão esférica, a superfície definida pela equação (3.32), quando representada no espaço de Haigh-Westergaard, (ref. [3.2, 3.3]), corresponde a um cilindro cujo eixo axial é o eixo hidrostático de tensões e o raio é igual a $\sqrt{2J_2}$. (Fig. 3.8) .

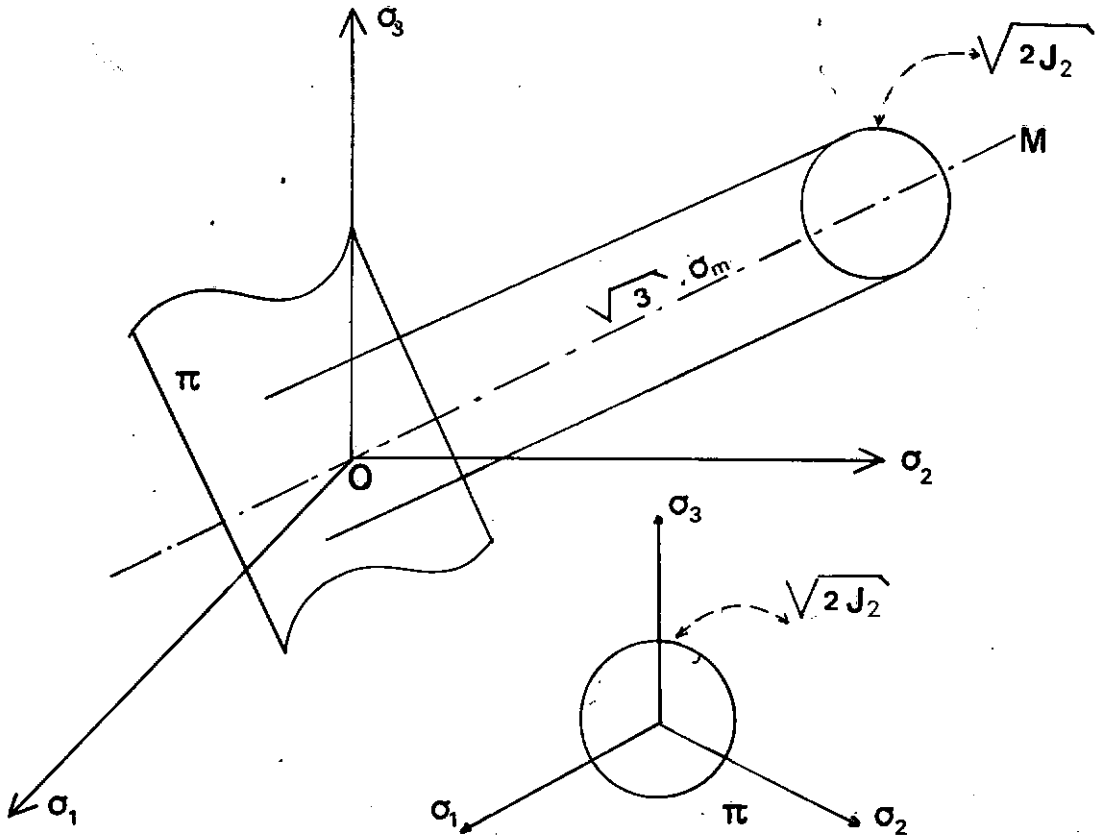


FIG. [3.8]

No presente estudo, o critério de escoamento de von Mises é utilizado na formulação elasto-plástica de materiais "com trabalho de endurecimento" e materiais "sem endurecimento". Para atender ao comportamento do material com endurecimento é necessário que se analise o processo de expansão da superfície de escoamento durante a plastificação do material. Neste ponto é interessante que inicialmente se compreenda fisicamente as implicações do comportamento de materiais com endurecimento no problema mais simples, ou seja, o correspondente ao carregamento uniaxial. Seja na Fig. 3.9, a curva (tensão x deformação) de um material submetido a um ensaio uniaxial de tração.

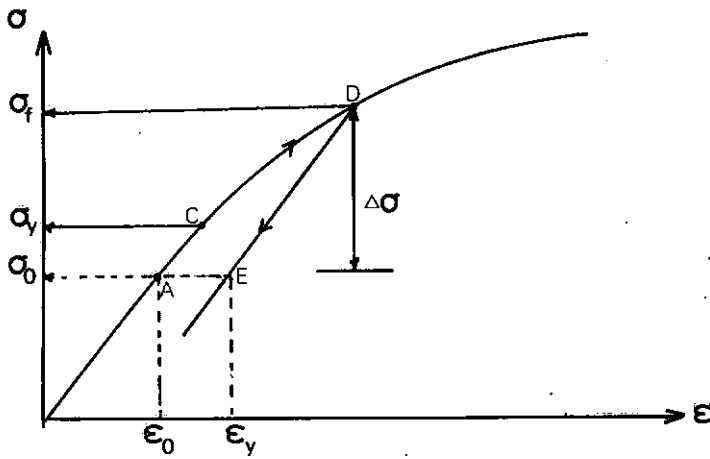


FIG. [3.9]

Inicialmente o material encontra-se no estado elástico para tensão inicial σ_0 . Subsequentemente o mesmo é carregado, elevando o nível de tensão de σ_0 para σ_f . Durante este carregamento o material começa a apresentar deformação plástica no momento em que o nível de tensão σ_y é alcançado (tensão de escoamento do material). Após a tensão ter alcançado o valor σ_f , ocorre o descarregamento de σ_f para σ_0 através da trajetória DE. Como consequência da plastificação do material neste ciclo de carga e descarga, tem-se duas implicações principais:

A primeira já foi explicada na Fig. 3.5, quando se demonstrou o fato da superfície de escoamento ser convexa.

A segunda (que serve como base para aplicações posteriores) corresponde à elevação da tensão de escoamento de σ_y para σ_f , ou seja, um novo escoamento ocorrerá quando somente o nível de tensão alcançar o valor σ_f . Este fato indica fisicamente o que vem a ser o endurecimento do material.

Estendendo-se esta explicação para um estado de tensões multiaxial, tem-se as seguintes analogias:

1 - O início de escoamento ocorre quando:

$$f(\underline{\sigma}) = K_0$$

onde

$f(\underline{\sigma})$ - função de carregamento

K_0 - valor inicial da função de escoamento plástico

$K = K(\underline{\epsilon}^P)$ (ítem 3.1).

2 - Em um ciclo de carregamento e descarregamento, o material se plastificará novamente quando o nível de tensões conduzir o valor da função f a se igualar com o último valor da função de escoamento K , valor este definido pelas deformações plásticas provenientes do último carregamento.

3 - Se a um estado de tensões $\underline{\sigma}_0$ sobre a superfície de escoamento adiciona-se um incremento infinitesimal de tensões $d\underline{\sigma}$, este se classificará em:

- carregamento

$$f(\underline{\sigma}_0) = K(\underline{\epsilon}_0^P), \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_0} d\underline{\sigma} > 0 = |d\underline{\epsilon}^P| > 0$$

- descarregamento

$$f(\underline{\sigma}_0) = K(\underline{\epsilon}_0^P), \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_0} d\underline{\sigma} < 0 \rightarrow d\underline{\epsilon}^P = 0$$

- carregamento neutro

$$f(\underline{\sigma}_0) = K(\underline{\epsilon}_0^P) \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_0} d\underline{\sigma} = 0 \rightarrow d\underline{\epsilon}^P = 0$$

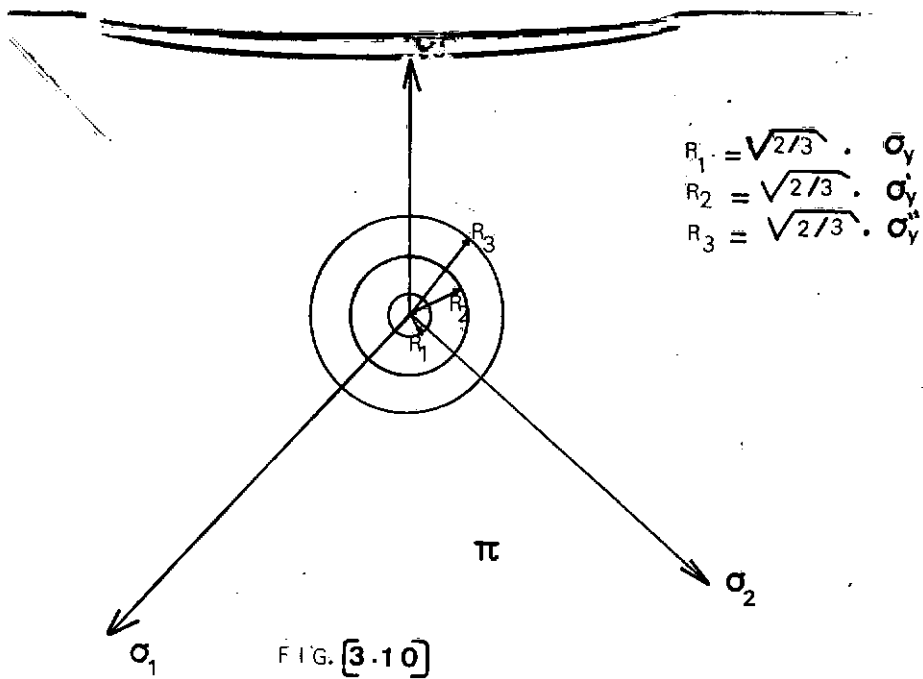
4 - Para o novo estado de tensões $\underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}$ (carreg.) e o novo campo de deformações plásticas $\underline{\epsilon}_0^P + d\underline{\epsilon}^P$, tem-se que:

$$f(\underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}) = K(\underline{\epsilon}_0^P + d\underline{\epsilon}^P)$$

o que implica, logicamente, em

$$df = dK \quad (3.36)$$

Com base na descrição anterior é fácil se concluir que durante o escoamento de um material todos os estados de tensões residem sobre superfícies de escoamento atualizadas. Esta atualização conduz à expansão e deformação da superfície de escoamento (ref. [3.3]). Em particular, quando o endurecimento do material dá origem a novas superfícies expandidas e concêntricas em relação à inicial porém sem se deformarem, diz-se que o material endurece isotropicamente. Na realidade, o material mantém-se isotrópico durante as deformações plásticas. Na Fig. 3.10, mostra-se as projeções sobre o plano π de superfícies de escoamento atualizadas segundo uma seção transversal.



É conveniente salientar que para o material sem endurecimento, ou plástico-perfeito, a superfície de escoamento se mantém constante, ou seja:

$$df = dK = 0$$

$$df > 0 \quad (\text{impossível})$$

$$f = K \rightarrow d\epsilon^P \neq 0$$

$$f < K \rightarrow d\epsilon^P = 0$$

(3.37)

A condição $df = 0$ em (3.37) indica que os incrementos de tensões $d\sigma$, durante um carregamento, sempre tangenciam a superfície de escoamento (equação (3.14), item 3.1).

Definição da Função de Escoamento Associada ao Critério de von Mises

No item 3.1 definiu-se a partir da aproximação unificada devido a Drucker (ref. [3.6]), a lei associativa de escoamento plástico, resultando na seguinte equação:

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.38)$$

Se aplicarmos (3.38) à função de carregamento de von Mises chega-se as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yz} \end{array} \right\} = d\lambda \left\{ \begin{array}{l} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d\epsilon_x^p}{S_x} = \frac{d\epsilon_y^p}{S_y} = \frac{d\epsilon_z^p}{S_z} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{xz}^p}{2\tau_{xz}} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = d\lambda \quad (3.39)$$

As relações de proporcionalidade em (3.39) também sugeridas por Prandtl-Reuss (ref. [3.2, 3.3]), implicam em:

- os incrementos de deformações plásticas são dependentes do estado de tensões desviatórias atual e não dos incrementos de tensões.
- os incrementos de deformações plásticas são co-direcionais com os eixos principais de tensões:

$$\frac{d\epsilon_1^p}{S_1} = \frac{d\epsilon_2^p}{S_2} = \frac{d\epsilon_3^p}{S_3} = d\lambda \quad (3.40)$$

- a lei de escoamento com base no critério de escoamento de von Mises pressupõe a não existência de deformações plásticas

ticas volumétricas:

$$d\varepsilon_x^P + d\varepsilon_y^P + d\varepsilon_z^P = d\lambda (S_x + S_y + S_z) = 0$$

- as relações (3.39) estabelecem a razão de proporcionalidade entre os incrementos de deformações plásticas de diferentes direções.

É conveniente que se defina agora duas grandezas:

- Tensão Efetiva ou Equivalentê (refs. [3.2 , 3.3])

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{3} \cdot \sqrt{J_2} \quad (3.41)$$

- Deformação Plástica Efetiva ou Equivalente

$$d\bar{\varepsilon}_p = \left[\frac{1}{3} (2(d\varepsilon_x^P)^2 + 2(d\varepsilon_y^P)^2 + 2(d\varepsilon_z^P)^2 + (d\gamma_{yz}^P)^2 + (d\gamma_{zx}^P)^2 + (d\gamma_{xy}^P)^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

Os escalares $\bar{\sigma}_e$ e $d\bar{\varepsilon}_p$ podem ser obtidos a partir das relações em (3.39) e de suas respectivas implicações, da interpretação geométrica do trabalho plástico e da analogia com o estado uniaxial de tensões ($\bar{\sigma}_e = \sigma_u$; $d\bar{\varepsilon}_p = d\varepsilon_u$) . As definições (3.41) e (3.42), juntamente com o trabalho plástico desenvolvido durante as deformações, permitem a obtenção da função de escoamento K .

$$d\omega = \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot d\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \quad (3.43)$$

$$d\omega = \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot (d\underline{\underline{\varepsilon}}^e + d\underline{\underline{\varepsilon}}^P) \quad (3.44)$$

sendo,

$$d\omega^e = \underline{\sigma}^T d\underline{\epsilon}^e - \text{energia interna reversível} \quad (3.45)$$

$$d\omega^p = \underline{\sigma}^T d\underline{\epsilon}^p - \text{energia interna irreversível} \quad (3.46)$$

Como $d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p = 0$ pode-se subtrair em (3.46) a parcela $\sigma_m (d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p)$ sem alterar o valor de $d\omega^p$, possibilitando escrever o trabalho plástico infinitesimal como função das tensões desviatórias, ou seja:

$$d\omega^p = \underline{s}^T \cdot d\underline{\epsilon}^p \quad (3.47)$$

Partindo-se do fato que os incrementos de deformações plásticas são co-direcionais com os eixos principais de tensões, prova-se geometricamente que (refs. [3.3 e 3.2]):

$$\underline{s}^T \cdot d\underline{\epsilon}^p = \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\epsilon}_p \quad (3.48)$$

Com a equação (3.48) o trabalho plástico infinitesimal passa a ser definido em função de $\bar{\sigma}_e$ e $d\bar{\epsilon}_p$, o que facilita o estudo da função de escoamento.

Existem duas hipóteses quanto à definição do endurecimento do material:

- A primeira, admite que K seja função do trabalho plástico acumulado durante as deformações.
- A segunda, que o mesmo seja função da deformação plástica equivalente (refs. [3.2 e 3.3]).

Sob o ponto de vista matemático estas duas hipóteses se escrevem por:

1^a hipótese

$$K = g(\omega^P)$$

onde

$$\omega^P = \int \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\epsilon}^P \quad (3.49)$$

2^a hipótese

$$K = H(\bar{\epsilon}_p)$$

onde

$$\bar{\epsilon}^P = \int d\epsilon_p \quad (3.50)$$

Reescrevendo-se o critério de escoamento de von Mises, na forma $\sigma_y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{J_2}$, verifica-se por comparação com a equação (3.41), que a função de carregamento $f(\underline{\sigma}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{J_2}$, durante o escoamento, iguala-se à tensão efetiva ou equivalente, ou seja:

$$f(\underline{\sigma}) = \bar{\sigma}_e$$

onde no início do escoamento

$$\bar{\sigma}_e = \sigma_y \quad (3.51)$$

A equação (3.51) sugere que $\bar{\sigma}_e$ seja utilizado como parâmetro de endurecimento do material ou função de escoamento.

Substituindo-se (3.51) em (3.49) e (3.50), resulta:

$$\bar{\sigma}_e = g\left(\int \underline{g}^T \cdot d\underline{\varepsilon}^p\right) = g\left(\int \bar{\sigma}_e d\bar{\varepsilon}_p\right) \quad (3.52)$$

$$\bar{\sigma}_e = H(\varepsilon_p) \rightarrow H(\bar{\varepsilon}_p) = g\left(\int \bar{\sigma}_e d\bar{\varepsilon}_p\right) \quad (3.53)$$

Pelas equações (3.51), (3.52) e (3.53), pode-se concluir que num material dotado de endurecimento isotrópico e com escoamento controlado pelo critério de von Mises, as duas hipóteses de medida de endurecimento são equivalentes.

É importante observar que as relações

$$\bar{\sigma}_e = g(\omega^p) \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_e = H(\bar{\varepsilon}_p)$$

são obtidas experimentalmente (refs [3.2, 3.3 e 3.15]). Na prática a relação $\bar{\sigma}_e = H(\bar{\varepsilon}_p)$ adquire certa preferência, sendo porém, algumas vezes, substituída pela curva (tensão x def. plástica) obtida no ensaio uniaxial (ref. [3.3]).

3.3.2 - Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb

Na teoria de mecânica dos solos as tensões cisalhantes que se desenvolvem em uma massa isotrópica de solo coesivo não devem ser maiores do que a tensão cisalhante máxima, fornecida como função linear da tensão normal. Esta condição foi sugerida por Coulomb e é expressa por:

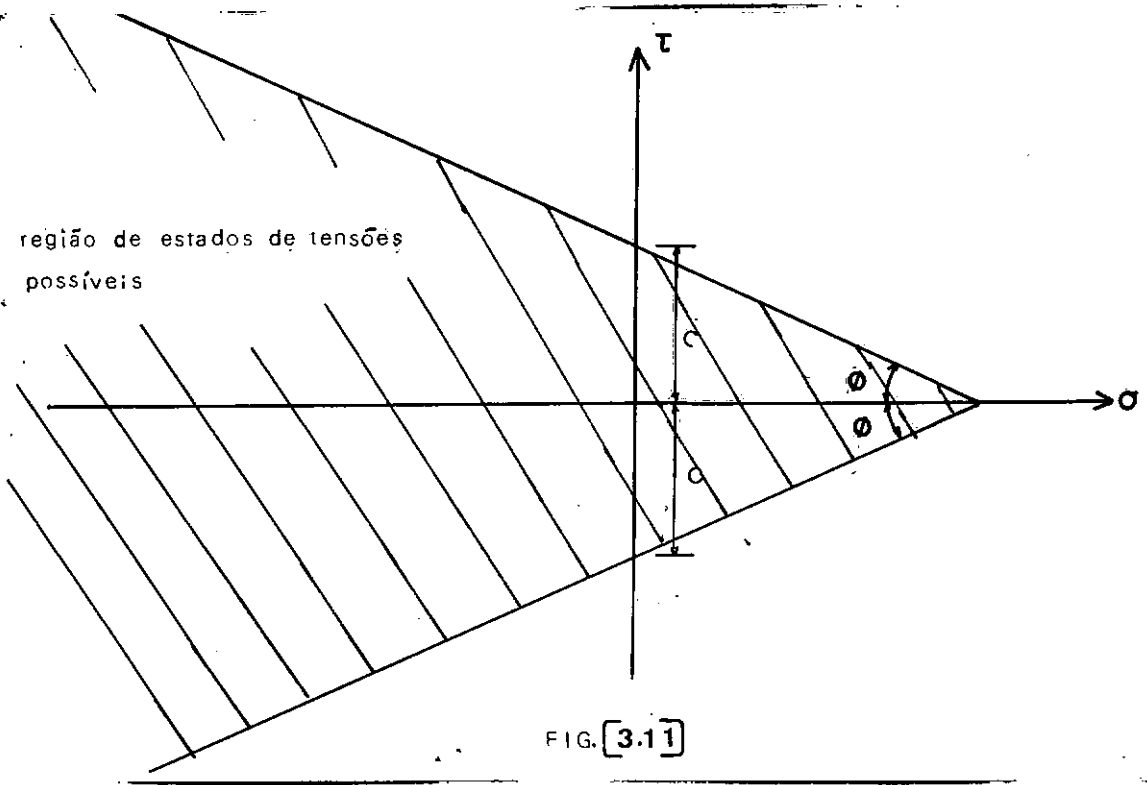
$$\tau \leq c - \sigma \tan \phi \quad (3.54)$$

onde

c - coesão do solo

ϕ - ângulo de atrito interno

A ruptura ocorre quando $\tau = c - \sigma \tan \phi$ em algum ponto da massa de solo. Se representássemos a equação (3.54) em um gráfico ($\tau \times \sigma$), ter-se-ia limitada a região dos estados de tensões que satisfazem a lei de Coulomb (refs. [3.10, 3.23]).



Para expressar a condição de escoamento em termos das tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , utiliza-se da representação gráfica de Mohr (Fig. 3.12).

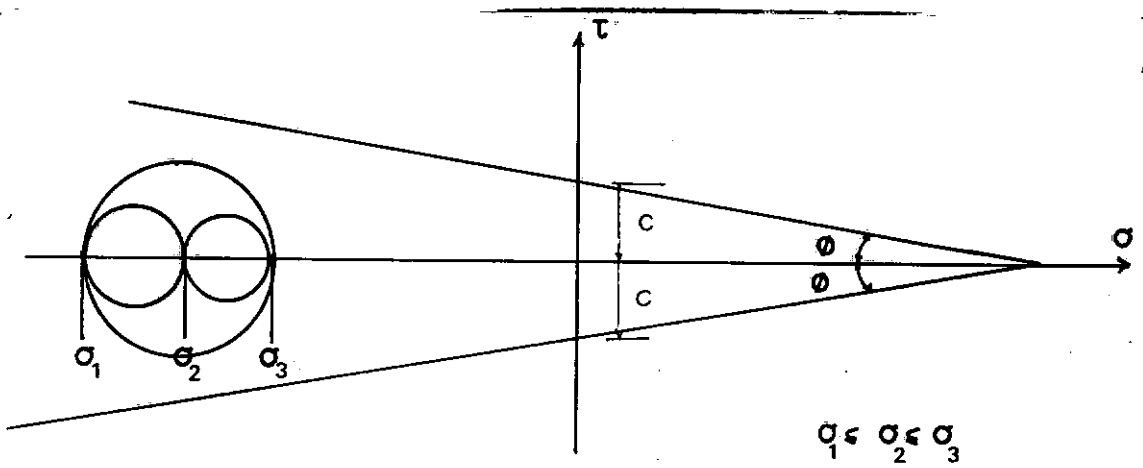


FIG. [3.12]

A ruptura de um ponto na massa de solo ocorrerá quando o maior dos três círculos tangenciar as envoltórias de Coulomb. Admitindo-se que $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ e com base na Figura 3.13, pode-se estabelecer a equação de ruptura do material, a qual constituirá o critério de escoamento de Mohr-Coulomb, denominado no presente estudo de Mohr-Coulomb Tradicional.

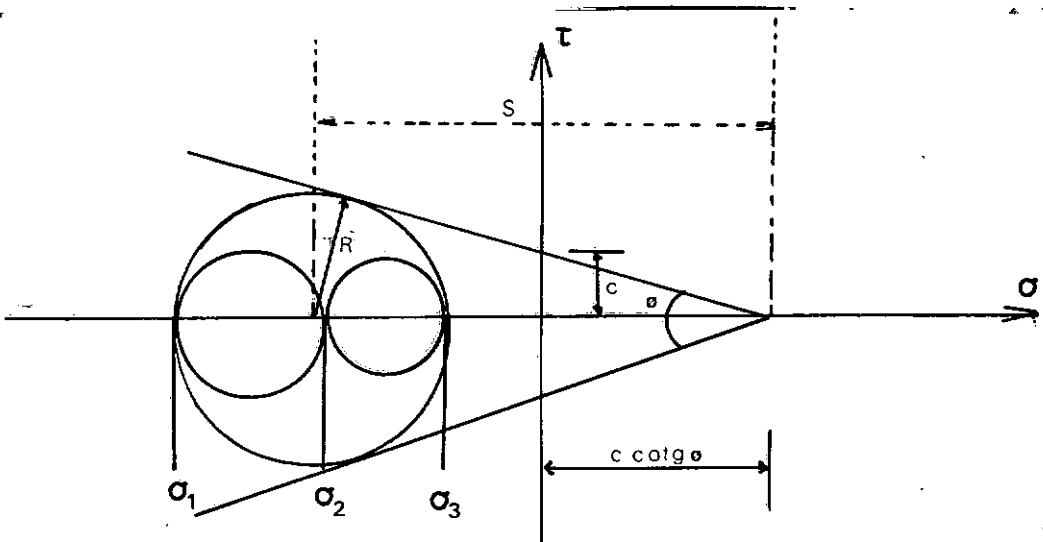


FIG. [3.13]

$$R = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (3.55)$$

$$S = c \cotg \phi - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (3.56)$$

$$\text{sen } \phi = \frac{R}{S} \rightarrow \quad (3.57)$$

$$\text{sen } \phi = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \cdot \frac{1}{c \cotg \phi - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} \rightarrow$$

$$\text{sen } \sigma \left[c \frac{\cos \phi}{\text{sen } \phi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$c \cos \phi - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \text{sen } \phi = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (3.58)$$

A equação (3.58) indicará qual combinação de tensões multiaxiais causará escoamento do material, sendo portanto a equação do critério de escoamento do material. Por observação da Fig. 3.13, a tensão principal σ_2 pode ter qualquer valor entre σ_1 e σ_3 , sem violar a condição de escoamento. A representação da superfície gerada pela equação (3.58) no espaço de Haigh-Wistergaard, (Fig. 3.14) é uma pirâmide reta hexagonal igualmente inclinada em relação aos eixos σ_1 , σ_2 e σ_3 , e com vértice "V" no ponto $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cotg \phi$ (refs. [3.26, 3.10 e 3.11]).

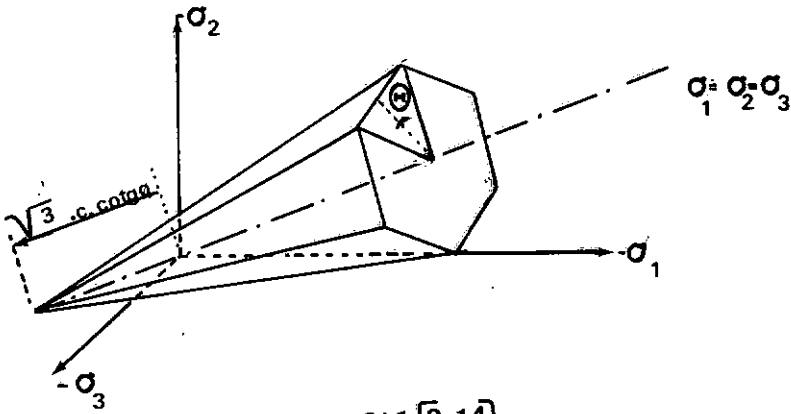
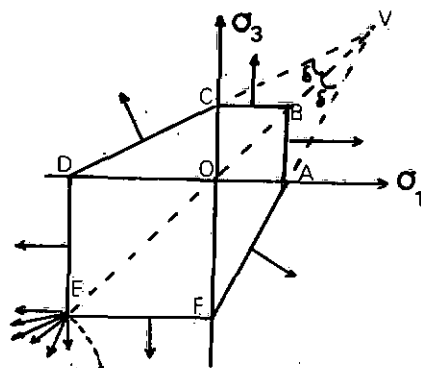


FIG. [3.14]

Na Fig. 3.15 tem-se a representação da equação (3.58) no plano $(\overline{\sigma_1 \sigma_3})$ admitindo-se $\sigma_2 = 0$ e na Fig. 3.16 o corte transversal da pirâmide no plano π . Em ambas as seções os pontos A, B, C, D, E e F são pontos singulares, os quais causam a indeterminação na definição dos incrementos de deformações plásticas, quando se utiliza da lei associativa apresentada no ítem 3.1.



indet. do gradiente da função de carregamento

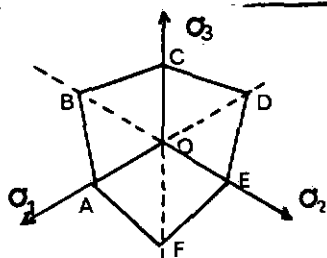
$$\sigma_2 = 0$$

$$OA = OC = 2c \tan \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta \right)$$

$$OD = OF = 2c \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta \right)$$

$$\tan \theta = \sin \phi$$

FIG. [3.15]



$$OA = \frac{2\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \theta}{(3 + \sin \theta)}$$

$$OB = \frac{2\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \theta}{(3 - \sin \theta)}$$

FIG. [3.16]

A forma como é apresentada a equação de escoamento em (3.58) não é conveniente à formulação elasto-plástica, bem como ao estudo da lei de escoamento associativa. Por este motivo deve-se obter uma equação compatível às necessidades anteriores. Esta nova equação é função das invariantes de tensões desviatórias, tomando como base o trabalho de Nayak e Zienkiewicz (ref. [4.5]).

Da ref. [4.5], tem-se:

$$(\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma} \begin{Bmatrix} \sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

onde

$$\bar{\sigma} = \sqrt{J_2} = \sqrt{0.50 (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (3.60)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3} \right) ; -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (3.61)$$

$$J_3 = S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \tau_{xy}^2 S_z - S_x \tau_{yz}^2 - S_z \tau_{xy}^2 \quad (3.62)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

- J_2 - 2ª invariante de tensões desviatórias
 J_3 - 3ª invariante de tensões desviatórias
 θ - ângulo de Lode (ref. [3.3, 3.2])

Substituindo-se as equações de (3.59) em (3.58), resulta a generalização da equação (3.58):

$$f(\sigma) = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi = 0 \quad (3.63)$$

No presente estudo é analisado somente o comportamento plástico-perfeito (refs. [3.10, 3.11, 3.12 e 3.23]) e outros, porém o comportamento do solo com consideração de endurecimento pode ser estudado nas refs. [3.13 e 3.24]. Por observação da equação (3.63), constata-se que esta não apresenta explicitamente a função de escoamento $K(\underline{\epsilon}^P)$, tendo somente a função de carregamento $f(\underline{\sigma})$. Esta disposição não restringe o uso da equação (3.63) somente ao estudo do comportamento plástico-perfeito, pois como mencionado na ref. [4.2], o endurecimento do material poderia ser introduzido através dos parâmetros c e ϕ , ambos funções de um parâmetro "k" qualquer, de endurecimento.

Um material, limitado ao comportamento plástico-perfeito e com critério de escoamento de Mohr-Coulomb, entra em escoamento sob as seguintes condições:

$$f(\underline{\sigma}) = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}^T d\underline{\sigma} = 0 \quad (3.64)$$

$$df > 0 \text{ (não existe)}$$

Por observação das equações em (3.64) é fácil concluir que durante o processo de plastificação os incrementos infinitesimais de tensões são tangentes à superfície de escoamento, (ítem 3.1), não sendo porém classificados como neutros.

- Carregamento

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}\right)_{\underline{\sigma}}^T d\underline{\sigma} = 0 \quad f(\underline{\sigma}) = 0 \rightarrow d\underline{\varepsilon}^p \neq 0$$

- descarregamento

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}\right)_{\underline{\sigma}}^T d\underline{\sigma} < 0 \quad f(\underline{\sigma}) = 0 \rightarrow d\underline{\varepsilon}^p = 0$$

- regime elástico

$$f(\underline{\sigma}) < 0 \rightarrow d\underline{\varepsilon}^p = 0$$

Como mostrado nas Figs. 3.14, 3.15 e 3.16, este critério tradicional de Mohr-Coulomb tem o inconveniente de apresentar pontos singulares segundo sete arestas e um vértice. No tratamento matemático da formulação elasto-plástica associada a este critério é necessário eliminar estes pontos singulares (ítem 3.2), de modo a se garantir a unicidade de soluções no que diz respeito aos incrementos de deformações plásticas. Quando se emprega este critério em um método numérico qualquer, em particular no método dos elementos finitos, a eliminação das singularidades é atendida por artifícios numéricos que prejudicam sensivelmente a eficiência computacional e nem sempre correspondem satisfatoriamente quanto aos resultados obtidos. Sugestões quanto aos recursos utilizados para este fim podem ser encontrados na

ref. [4.2].

Em presença dessa característica insatisfatória do critério de Mohr-Coulomb Tradicional surge a idéia de se substituir a superfície de escoamento tradicional (equação (3.63)), por uma superfície que lhe seja a mais próxima possível e sem pontos singulares.

No presente estudo, utiliza-se a superfície sugerida por Zienkiewicz e Pánde (ref. [3.26]), a qual constitui o aqui denominado "Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb Modificado".

3.4 - CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MOHR-COULOMB MODIFICADO

A aproximação da seção meridional $(\bar{\sigma} \times \sigma_m)$ sua visa a angulosidade do vértice.

A análise da relação existente entre $(\bar{\sigma} \times \sigma_m)$ é conduzida pela fixação do ângulo de "Lode" θ na equação (3.63). Aqui é utilizada a seção meridional em $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \cos \theta - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi - c \cos \phi = 0$$

Para

$$\theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow$$

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma}_+ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \phi \right) - c \cos \phi = 0 \quad (3.65)$$

onde

$\bar{\sigma}_+$ é o valor de $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\sigma_m)$ para $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Trabalhando a equação (3.65), resulta:

$$\bar{\sigma}_+ = \frac{2\sqrt{3}}{(3 - \sin \phi)} \cdot c \cos \phi - \frac{2\sqrt{3} \sin \phi}{(3 - \sin \phi)} \sigma_m \quad (3.66)$$

A equação (3.66) é uma reta do tipo $y = h + kx$, apresentada na Fig. 3.17.

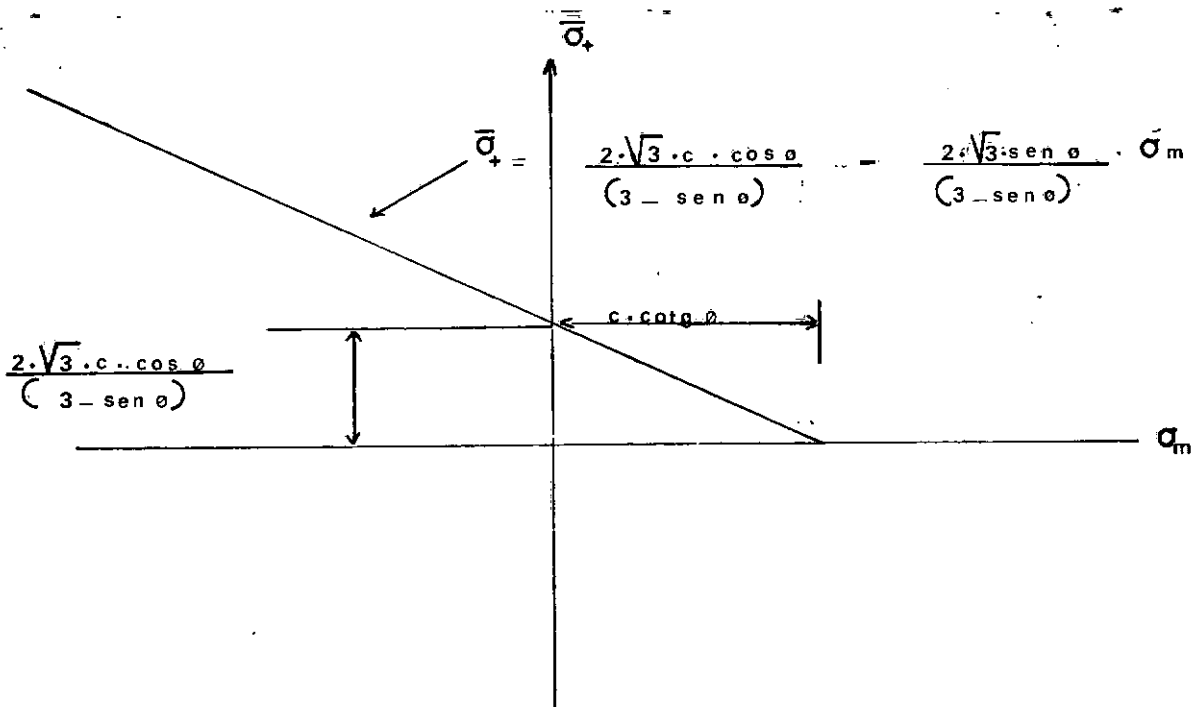


FIG. [3.17]

Uma boa aproximação da reta $(\sigma_+ \times \sigma_m)$ é uma hipérbole (ref. [3.26]), a qual satisfaz a condição da não existência de ponto singular no vértice (Fig. 3.18).

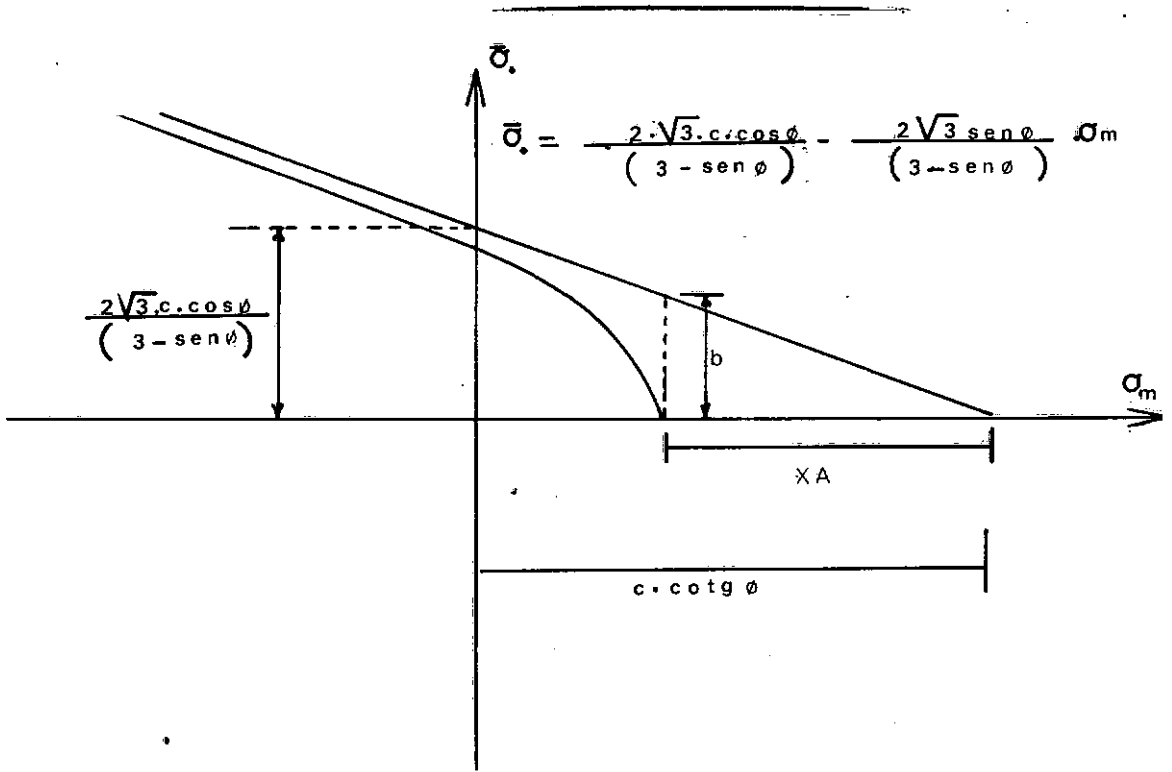


FIG. [3.18]

$$b = \frac{2\sqrt{3} \operatorname{sen} \phi}{(3 - \operatorname{sen} \phi)} XA \quad (3.67)$$

A equação da hipérbole (ref. [3.25]) é dada por :

$$\frac{(\sigma_m - c \cotg \phi)}{XA^2} - \frac{\sigma_+^2}{b^2} = 1 \quad (3.68)$$

Substituindo (3.67) em (3.68):

$$\frac{(\sigma_m - c \cotg \phi)}{XA^2} - \frac{\sigma_+^2}{12 \cdot \operatorname{sen}^2 \phi \cdot XA^2} = 1 \quad (3.69)$$

Fazendo-se as devidas multiplicações em (3.69),
resulta em:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_+^2 + \sigma_m \frac{24c \cos \phi \sin \phi}{(3 - \sin \phi)^2} - \sigma_m^2 \frac{12 \sin^2 \phi}{(3 - \sin \phi)^2} + \\ + \frac{12 (XA^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi)}{(3 - \sin \phi)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Chamando

$$\alpha = - \frac{12 \sin^2 \phi}{(3 - \sin \phi)^2} \quad (3.71)$$

$$\beta = \frac{24 \cdot c \cdot \cos \phi \sin \phi}{(3 - \sin \phi)^2} \quad (3.72)$$

$$\gamma = \frac{12 (XA^2 \cdot \sin^2 \phi - c^2 \cdot \cos^2 \phi)}{(3 - \sin \phi)^2} \quad (3.73)$$

pode-se escrever a equação (3.70) numa forma mais adequada:

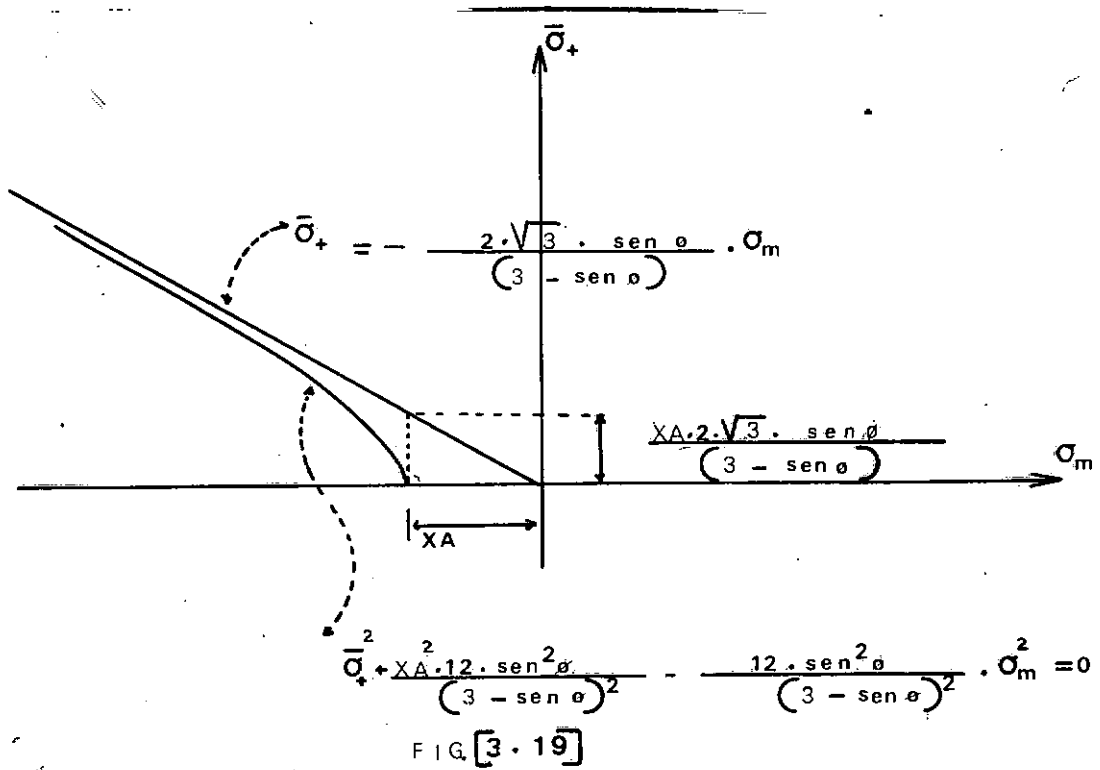
$$\bar{\sigma}_+^2 + \alpha \sigma_m^2 + \beta \sigma_m + \gamma = 0 = f(\sigma) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{6}} \quad (3.74)$$

No caso de materiais não coesivos as constantes anteriores assumem os seguintes valores (Fig. 3.19).

$$\alpha = - \frac{12 \sin^2 \phi}{(3 - \sin \phi)^2} \quad (3.75)$$

$$\beta = 0 \quad (3.76)$$

$$\gamma = \frac{12 (XA^2 \sin^2 \phi)}{(3 - \sin \phi)^2} \quad (3.77)$$



A equação (3.74) indica qual a combinação de tensões multiaxiais que conduz ao escoamento do material, porém particularizada à seção meridional em $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Para que esta equação possa ser usada como critério de escoamento é necessário que a mesma seja generalizada para todo campo de variação do ângulo θ ($-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$), como apresentado a seguir.

Um vetor de tensões incidente sobre uma superfície de escoamento qualquer pode ser decomposto em um vetor segundo a direção do eixo hidrostático e um outro normal a este eixo (Fig. 3.20).

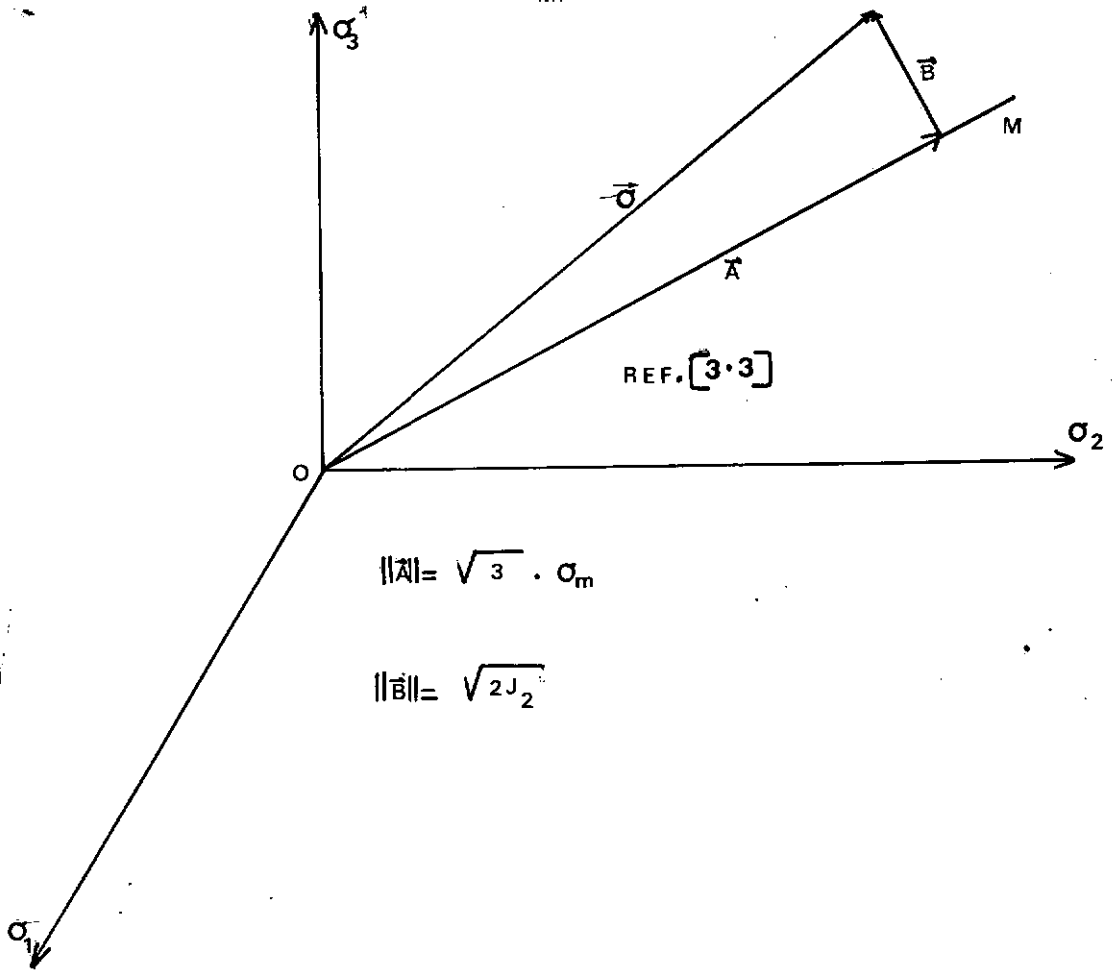


FIG. [3.20]

Com base nos resultados apresentados na Fig. 3.20 conclui-se que o raio de um ponto qualquer no contorno da seção transversal é dado por:

$$r = \sqrt{2} \cdot \bar{\sigma} \quad (3.78)$$

A forma da seção transversal será portanto função do parâmetro $\bar{\sigma}$, o qual é função do critério de escoamento adotado. Por exemplo, no item 3.3.1, relativo ao critério de von

Mises, o raio é constante para qualquer ângulo θ e é igual a $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_y$. Quando se utiliza do critério de escoamento de Mohr - Coulomb Tradicional, a seção transversal da superfície de escoamento tem a forma de um hexágono irregular, como apresentado na Fig. 3.16, no plano π . As dimensões dos raios máximo e mínimo, são agora demonstradas com auxílio da Fig. 3.21.

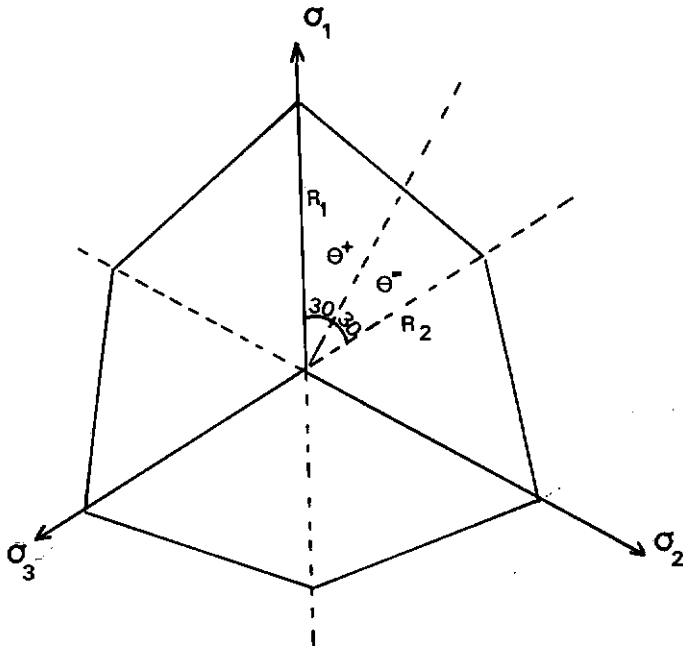


FIG. [3.21]

Retomando-se a equação (3.63) e fazendo-se $\sigma_m = 0$, obtém-se a relação entre $\bar{\sigma}$ e θ :

$$\bar{\sigma} = \frac{c \cos \phi}{\left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right)} \quad (3.79)$$

Os raios r_1 e r_2 da Fig. 3.21, são equacionados introduzindo-se em (3.79) $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$:

$$\bar{\sigma}_+ \Big|_{\theta = +\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3} \, c \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \rightarrow r_1 = \frac{2\sqrt{6} \, c \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \quad (3.80)$$

(Fig. 3.16)

$$\bar{\sigma}_- \Big|_{\theta = -\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3} \, c \cos \phi}{(3 + \sin \phi)} \rightarrow r_2 = \frac{2\sqrt{6} \, c \cos \phi}{(3 + \sin \phi)} \quad (3.81)$$

(Fig. 3.16)

Pela exposição anterior é razoável que se procure determinar uma função $S(\theta)$ de tal modo que:

$$\bar{\sigma}(\theta) = \bar{\sigma}_+ \cdot S(\theta) \quad (3.82)$$

ou

$$\bar{\sigma}(\theta) = \bar{\sigma}_- \cdot S(\theta) \quad (3.83)$$

Utilizando-se a equação (3.82), a função $S(\theta)$ é dada por:

$$S(\theta) = \frac{(3 - \sin \phi)}{2\sqrt{3} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right)} \quad (3.84)$$

onde

$$S\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \rightarrow \bar{\sigma}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_+ \cdot S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_+$$

$$S\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{(3 - \sin \phi)}{(3 + \sin \phi)} \rightarrow \bar{\sigma}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_+ \cdot S\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_-$$

Nos pontos de singularidade tem-se:

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{6}} = \bar{\sigma}_+ \left. \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{6}} \neq 0 \quad (3.85)$$

De modo a suavizar as angulosidades existentes na seção transversal da superfície de Mohr-Coulomb deve-se escolher uma função $h(\theta)$, tal que:

$$\left. \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{6}} = 0 \quad (3.86)$$

Adota-se aqui a função $h(\theta)$ fornecida na ref. [3.26], a qual apresenta as seguintes características:

$$h(\theta) = \frac{2k}{(1+k) - (1-k) \sin 3\theta} \quad (3.87)$$

$$\left. \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{6}} = 0 \quad (3.88)$$

$$h\left(+\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$h\left(-\frac{\pi}{6}\right) = k$$

$$k = \frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad (3.89)$$

Tomando-se como valor base

$$\bar{\sigma}_+ = \frac{2\sqrt{3} c \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \text{ (equação (3.77))}$$

$$\bar{\sigma}(\theta) = \bar{\sigma}_+ \cdot h(\theta) \quad (3.90)$$

onde

$$\bar{\sigma}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_+ \cdot h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_+ = \frac{2\sqrt{3} \, c \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \quad (3.91)$$

$$\bar{\sigma}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_+ \cdot h\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \bar{\sigma}_+ \cdot k = \frac{2\sqrt{3} \, c \cos \phi}{(3 + \sin \phi)} \quad (3.92)$$

Utilizando-se a equação (3.90), a seção transversal de Mohr-Coulomb sem angulosidade é descrita por:

$$r = \sqrt{2} \cdot \bar{\sigma}_+ \cdot h(\theta) \quad (3.93)$$

(Fig. 3.22)

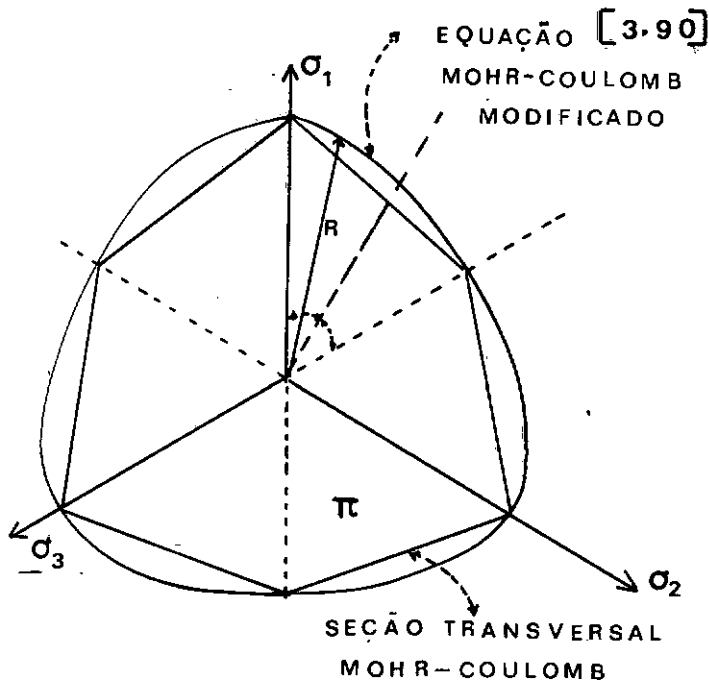


FIG. [3.22]

Substituindo-se $\bar{\sigma}_+$ da equação (3.74) por $\frac{\bar{\sigma}(\theta)}{h(\theta)}$, obtêm-se a equação de escoamento geral $(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6})$ do critério de Mohr-Coulomb Modificado, cuja característica principal é a não existência de pontos singulares:

Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb Modificado

$$f(\underline{\sigma}) = \alpha \sigma_m^2 + \beta \sigma_m + \gamma + \left(\frac{\bar{\sigma}}{h(\theta)}\right)^2 \quad (3.94)$$

IV - MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS IMPLEMENTADOS

Os conceitos elementares comentados no Capítulo anterior servem de base para o desenvolvimento dos modelos elasto-plásticos utilizados. O desempenho destes depende fundamentalmente da forma como são implementados.

O modelo elasto-plástico engloba principalmente o conhecimento da lei de escoamento plástico e do processo de endurecimento do material. O produto final é a matriz constitutiva elasto-plástica, que é responsável pela correção e atualização do estado de tensões.

No presente estudo três modelos elasto-plásticos são considerados. O primeiro associado aos materiais dotados de endurecimento plástico e que obedecem ao critério de escoamento de von Mises; o segundo e terceiro apropriados aos materiais plástico-perfeitos e que obedecem aos critérios de Mohr-Coulomb Modificado e Mohr-Coulomb Tradicional respectivamente.

Como os sistemas estruturais são discretizados por três tipos de elementos, onde cada um é caracterizado por um estado de tensões particular, tem-se uma distinção teórica quanto ao tratamento da lei constitutiva a ser empregada. Nos elementos de treliça e interface o modelo físico idealizado conduz ao estado de tensões uniaxial. A lei constitutiva do material é muito simples, sendo obtida diretamente da curva (tensão x deformação) do ensaio uniaxial. (Fig. 4.1), não necessitando porém maiores explicações.

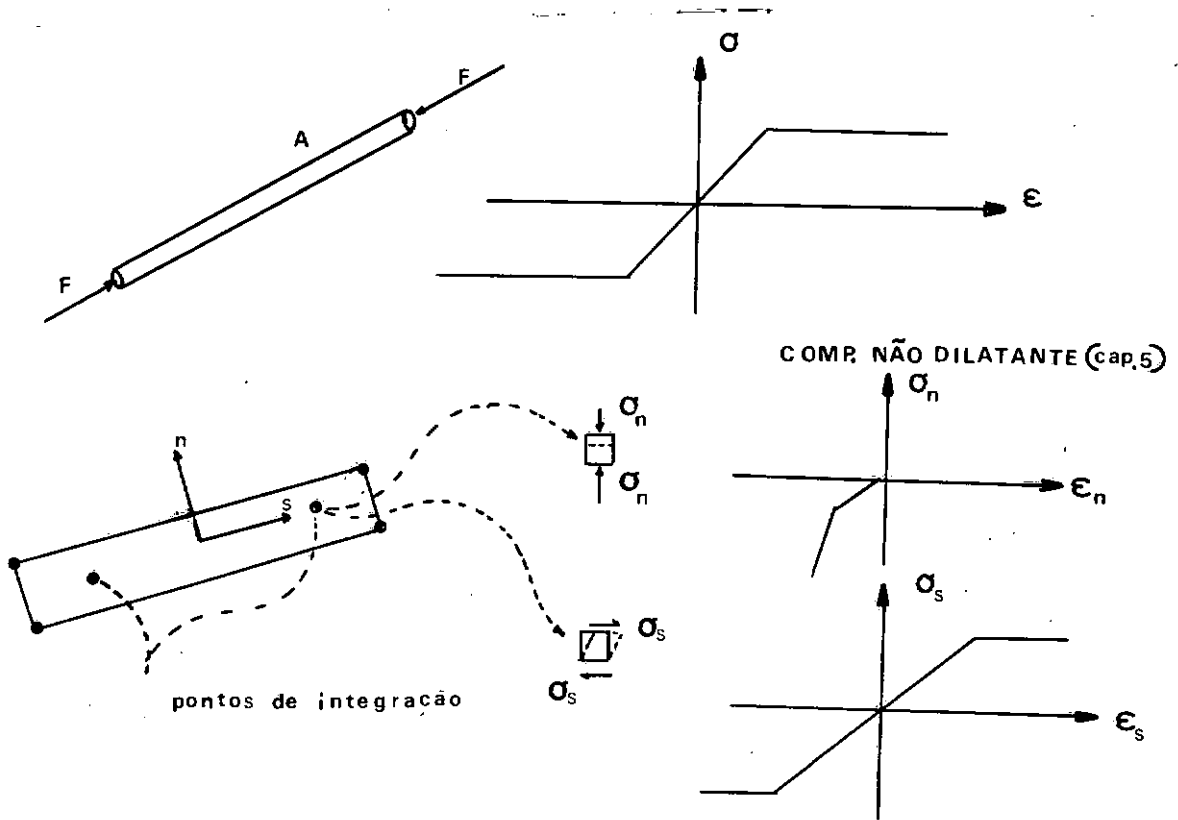


FIG. [4.1]

Nos elementos isoparamétricos o estado de tensões em cada ponto de integração pertence ao espaço Euclidiano hexadimensional de tensões, sendo estudado portanto com base na apresentação teórica do Capítulo III. Neste caso, existem três formulações particulares, que são funções do tipo de sistema estrutural. Os demais itens deste Capítulo são portanto, dedicados à formulação elasto-plástica relativa a este espaço multiaxial de tensões.

De modo a aproveitar os recursos numéricos disponíveis pelo método dos elementos finitos, algumas adaptações são necessárias ao desenvolvimento teórico tradicional da plasticidade, as quais são devidamente esclarecidas.

4.1 - FORMULAÇÃO ELÁSTICA

Com base na teoria da elasticidade linear (pequenos deslocamentos) (ref. [2.20]), as matrizes constitutivas elásticas são fornecidas por:

ESTADO PLANO DE TENSÕES

$$\underline{d\sigma} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \underline{D} \quad (4.1)$$

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

$$\underline{d\sigma} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \underline{D} \quad (4.2)$$

SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS

$$\underline{d\sigma} = \begin{Bmatrix} d\sigma_r \\ d\sigma_z \\ d\tau_{rz} \\ d\sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_r \\ d\epsilon_z \\ d\gamma_{rz} \\ d\epsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

\underline{D}

onde

E - Módulo de Young

ν - Coeficiente de Poisson

Estas matrizes são usadas na integração passo-a-passo das respostas dinâmicas elásticas e elasto-plásticas.

4.2 - FORMULAÇÃO ELASTO-PLÁSTICA ASSOCIADA AO CRITÉRIO DE VON MISES

No Capítulo III a equação de escoamento de von Mises foi apresentada segundo duas formas:

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_y^2 \quad (4.4)$$

$$\sqrt{3} \sqrt{J_2} = \sigma_y \quad (4.5)$$

As equações (4.4) e (4.5) estabelecem as mesmas

relações (tensão x deformação), apesar da função de carregamento ser diferente:

$$f_1(\underline{\sigma}) = J_2 \quad (4.6)$$

$$f_2(\underline{\sigma}) = \sqrt{3} \sqrt{J_2} \quad (4.7)$$

A equivalência decorre do emprego da lei associativa de escoamento, onde a proporcionalidade entre os incrementos de deformações plásticas e o gradiente da função de carregamento conduz a um parâmetro $d\lambda$, de tal modo que:

$$d\underline{\varepsilon}^P = d\lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}} = d\lambda_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.8)$$

A equação (4.7) é preferivelmente utilizada devido à mesma se igualar, durante o escoamento, à tensão efetiva ou equivalente que é usada como função de escoamento.

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{3} \sqrt{J_2} = \bar{\sigma}_e \quad (4.9)$$

onde.

$$(\text{Cap. III}) \quad \bar{\sigma}_e = K(\underline{\varepsilon}^P)$$

Logicamente, como mencionado no Capítulo III, este critério é associado ao comportamento dos materiais homogêneos dotados de endurecimento isotrópico, cuja expansão da superfície de escoamento é função de $\bar{\sigma}_e$.

A função de escoamento $\bar{\sigma}_e$ pode ser definida segundo duas hipóteses:

$$\bar{\sigma}_e = g \left(\int \bar{\sigma}_e d\bar{\epsilon}_p \right) \quad (4.10)$$

ou:

$$\bar{\sigma}_e = H(\bar{\epsilon}_p) \rightarrow g \left(\int \bar{\sigma}_e d\bar{\epsilon}_p \right) = H(\bar{\epsilon}_p) \quad (4.11)$$

Utilizando-se (4.10) e (4.11) pode-se definir o parâmetro $d\lambda$.

As condições de escoamento estabelecem que:

$$|d\bar{\epsilon}^p| > 0 \quad \text{se} \quad f(\underline{\sigma}) = K(\underline{\epsilon}^p) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}^T d\underline{\sigma} > 0 \rightarrow d\bar{\epsilon}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.12)$$

Após a plastificação $df = dK$ (Cap. III), de onde se conclui que:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}^T \cdot d\underline{\sigma} = dK = \frac{d\bar{g}}{d\bar{\omega}_p} \cdot \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\epsilon}_p \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}^T \cdot d\underline{\sigma} = g' \cdot \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\epsilon}_p$$

mas

$$g \left(\int \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\epsilon}_p \right) = H(\bar{\epsilon}_p) \rightarrow g' \cdot \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\epsilon}_p = \frac{dH}{d\bar{\epsilon}_p} \cdot d\bar{\epsilon}_p \rightarrow g' = \frac{1}{\bar{\sigma}_e} \cdot H' \quad (4.14)$$

Pré-multiplicando-se (4.12) por $\underline{\sigma}^T$:

$$\underline{\sigma}^T \cdot d\bar{\epsilon}^p = d\lambda \cdot \underline{\sigma}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.15)$$

Pelo teorema de Euler, para uma função homogênea $\underline{\sigma}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = n f$ ref. [3.2], onde n é o grau de f em $\underline{\sigma}$. Para f definida em (4.7), n é igual a 1, resultando em:

$$\underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon}^p = d\lambda \cdot 1 \cdot f \quad (4.16)$$

Das equações (3.47) e (3.48), tem-se :

$$\underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\varepsilon}^p = \underline{S}^T \cdot d\underline{\varepsilon}^p = \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\varepsilon}_p \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) em (4.16):

$$\underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon}^p = \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda \cdot f \cdot 1$$

Como $f(\underline{\sigma}) = \bar{\sigma}_e$, então:

$$\bar{\sigma}_e d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda \cdot \bar{\sigma}_e$$

$$\boxed{d\lambda = d\bar{\varepsilon}_p} \quad (4.18)$$

Substituindo (4.14) em (4.13):

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}^T d\underline{\sigma} = g' \cdot \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\varepsilon}_p = \frac{1}{\bar{\sigma}_e} \cdot \bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\varepsilon}_p \cdot H' \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}^T d\underline{\sigma} = dK = d\bar{\varepsilon}_p \cdot H'$$

mas

$$dK = d\bar{\sigma}_e \rightarrow H' = \boxed{\frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\varepsilon}_p}} \quad (4.19)$$

De (4.19) conclui-se que H' é o coeficiente angular da tangente à curva $(\bar{\sigma}_e \times d\bar{\epsilon}_p)$ definida experimentalmente e algumas vezes substituída pela curva $(\sigma \times d\epsilon_p)$ do ensaio uniaxial (Capítulo III).

Se utilizássemos $f(\underline{\sigma}) = J_2$, $d\lambda$ seria definido por:

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.20)$$

Pré-multiplicando (4.20), por $\underline{\sigma}^T$:

$$\underline{\sigma}^T \cdot d\epsilon^p = d\lambda \cdot \underline{\sigma}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.21)$$

Aplicando-se o teorema de Euler em (4.21) chega-se a:

$$\underline{\sigma}^T \cdot d\epsilon^p = d\lambda \cdot 2 \cdot f$$

Como $f = \frac{1}{3} \bar{\sigma}_e^2$, então:

$$\bar{\sigma}_e \cdot d\bar{\epsilon}_p = d\lambda \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \bar{\sigma}_e^2$$

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_p}{\bar{\sigma}_e} \quad (4.22)$$

(sendo esta equação utilizada nos livros tradicionais (refs.[3.2, 3.3])).

Pode-se agora provar que ambos os tratamentos em (4.4) e (4.5) se equivalem no que diz respeito aos incrementos de deformações plásticas.

Pela equação (4.18), tem-se:

$$d_{\bar{\epsilon}}^p = d_{\bar{\epsilon}}^p \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$$

onde,

$$f = \sqrt{3} \sqrt{J_2}$$

$$d_{\bar{\epsilon}}^p = d_{\bar{\epsilon}}^p \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot \left\{ \begin{array}{c} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

Pela equação (4.22):

$$d_{\bar{\epsilon}}^p = \frac{d_{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}_e} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{d_{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}_e} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{d_{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}_e} \left\{ \begin{array}{c} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

Substituindo em (4.23) $\sqrt{J_2}$ por $\frac{\bar{\sigma}_e}{\sqrt{3}}$, prova-se a equivalência de (4.4) e (4.5).

A formulação elasto-plástica quando aplicada ao mê todo dos elementos finitos, para efeito de programação, utiliza a seguinte equação de escoamento:

$$F(\underline{\sigma}, \bar{\epsilon}_p) = f(\underline{\sigma}) - \bar{\sigma}_e \quad (4.25)$$

Esta equação estabelece a seguinte condição de escoamento:

$$F(\underline{\sigma}; \bar{\epsilon}_p) = 0 \rightarrow dF = 0 \quad (4.26)$$

(que é idêntico a (3.36)).

As deformações plásticas $d\bar{\epsilon}^p$ não são nulas para um incremento $d\underline{\sigma}$ de tensões se $F(\underline{\sigma}, \bar{\epsilon}_p) > 0$ (hipótese "A" ítem 3.1), bem como a lei associativa aplicada a $F(\underline{\sigma}, \bar{\epsilon}_p)$ não conduz a nenhuma alteração já que $\bar{\epsilon}_p$ não depende explicitamente de $\underline{\sigma}$.

Usando-se o mesmo desenvolvimento apresentado na ref. [4.2] pode-se agora obter a matriz constitutiva elasto-plástica associada ao critério de von Mises

$$dF = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}^T d\underline{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_p} d\bar{\epsilon}_p = 0 \quad (4.27)$$

Chamando

$$\underline{a} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}$$

e

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_p} d\bar{\epsilon}_p \right\} = \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p}$$

tem-se:

$$\underline{a}^T d\sigma - A d\lambda = 0 \quad (4.28)$$

O incremento de deformações total é dado por:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \rightarrow \quad (4.29)$$

$$d\epsilon = \underline{D}^{-1} \cdot d\sigma + d\lambda \underline{a} \quad (4.30)$$

Pré-multiplicando (4.30) por $\underline{a}^T \cdot \underline{D}$, resulta em:

$$\underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot d\epsilon = \underline{a}^T \cdot d\sigma + d\lambda \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}$$

mas de (4.28)

$$\underline{a}^T d\sigma = A d\lambda \rightarrow$$

$$\underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot d\epsilon = A d\lambda + d\lambda \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a} \rightarrow$$

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \cdot \underline{D}}{A + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} d\epsilon \quad (4.31)$$

Pré-multiplicando (4.30) por \underline{D} :

$$\underline{D} d\epsilon = d\sigma + \underline{D} \underline{a} \cdot d\lambda \quad (4.32)$$

Substituindo-se $d\lambda$ em (4.32) pela sua expressão definida em (4.31):

$$\underline{D} \, d\varepsilon = d\sigma + \frac{\underline{D} \, \underline{a} \, \underline{a}^T \, \underline{D}}{\underline{A} + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \, d\varepsilon \rightarrow \quad (4.33)$$

$$(\underline{D} - \underline{D}_p) \, d\varepsilon = d\sigma \quad (4.34)$$

onde

$$\underline{D} - \underline{D}_p = \underline{D}_{ep}$$

(matriz elasto-plástica) (réf. [4.2]).

$$d\sigma = \underline{D}_{ep} \, d\varepsilon \quad (4.35)$$

Em (4.33) e (4.34) tem-se as seguintes especificações conforme o tipo do sistema estrutural:

\underline{D} - matriz constitutiva elástica, fornecida no ítem (4.1).

\underline{a} - gradiente da função de escoamento o qual, conforme o tipo do sistema estrutural, é definido por:

ESTADO PLANO DE TENSÕES (ref. [4.2])

$$\underline{a} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{J_2}} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS (ref. [4.2])

$$\underline{a} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\} = \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_r} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \tau_{rz}} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_\theta} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{J_2}} \left\{ \begin{array}{c} S_r \\ S_z \\ 2\tau_{rz} \\ S_\theta \end{array} \right\} \quad (4.37)$$

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (ref. [4.1])

$$\underline{a} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_z} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{J_2}} \left\{ \begin{array}{c} S_x \\ S_y \\ 2\tau_{xy} \\ S_z \end{array} \right\} \quad (4.38)$$

O estado plano de deformações é caracterizado por $\epsilon_z = 0$ e $d\epsilon_z = 0$, portanto o coeficiente A e o vetor \underline{a} podem ser modificados por condensação de ϵ_z como mostrado a seguir (ref. [4.1]):

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x^e \\ d\epsilon_y^e \\ d\gamma_{xy}^e \\ d\epsilon_z^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1 & -\nu & 0 & -\nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ d\sigma_z \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Os incrementos infinitesimais de deformações totais $d\epsilon$ podem ser definidos por:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ d\epsilon_z \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1 & -\nu & 0 & -\nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \end{Bmatrix} - A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ d\sigma_z \\ d\lambda \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Fazendo-se $d\epsilon_z = 0$ em (4.40) pode-se simplificar a matriz constitutiva do estado plano de deformações:

$$0 = -\frac{\nu}{E} d\sigma_x - \frac{\nu}{E} d\sigma_y + \frac{d\sigma_z}{E} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} d\lambda \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} d\sigma_z - A d\lambda = 0 \quad (4.42)$$

$$d\sigma_z = \nu(d\sigma_x + d\sigma_y) - E \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} d\lambda \quad (4.43)$$

$$d\epsilon_x = \frac{d\sigma_x}{E} - \frac{\nu d\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} d\sigma_z + \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} d\lambda \quad (4.44)$$

Substituindo-se (4.43) em (4.44):

$$d\epsilon_x = \frac{d\sigma_x}{E} - \frac{\nu d\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \left[\nu(d\sigma_x + d\sigma_y) - E \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} d\lambda \right] + \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} d\lambda$$

$$d\epsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} d\sigma_x - \frac{\nu^2 + \nu}{E} d\sigma_y + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right) d\lambda \quad (4.45)$$

Do mesmo modo que em (4.45), tem-se:

$$d\epsilon_y = -\frac{\nu + \nu^2}{E} d\sigma_x + \frac{1 - \nu^2}{E} d\sigma_y + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right) d\lambda \quad (4.46)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right) d\sigma_x + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right) d\sigma_y + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} - \left(E \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right)^2 + A \right) d\lambda = 0 \quad (4.47)$$

Pode-se agora escrever (4.45), (4.46) e (4.47) em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1 - \nu^2 & -(\nu^2 + \nu) & 0 & (\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}) \\ -(\nu + \nu^2) & (1 - \nu^2) & 0 & (\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}) \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \\ (\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}) & (\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}) & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} & -(A + E (\frac{\partial F}{\partial \sigma_z})^2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ d\lambda \end{Bmatrix}$$

Portanto para o estado plano de deformações o vetor \underline{a} e o coeficiente A em (4.33) são expressos por:

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} + \nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{J_2}} \cdot \begin{Bmatrix} S_x + \nu S_z \\ S_y + \nu S_z \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

e

$$A = A + E \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right)^2 = A + \frac{3}{4} \frac{E}{J_2} S_z^2 \quad (4.50)$$

4.2.1 - Histórico de Tensões e Deformações para o Modelo Elasto-Plástico de von Mises

Seja um ponto material (ponto de integração do elemento isoparamétrico) submetido a um estado de tensões $\underline{\sigma}_0$ e de deformações $\underline{\epsilon}_0$ na região elástica interior à superfície de escoamento. Devido à ação de um agente externo adiciona-se ao estado de deformações $\underline{\epsilon}_0$ um incremento $d\underline{\epsilon}$. Supõe-se inicialmente que o incremento de tensões $d\underline{\sigma}$ seja elástico, ou seja:

$$d\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot d\underline{\epsilon} \quad (4.51)$$

Somando-se $d\underline{\sigma}$ a $\underline{\sigma}_0$ podem ocorrer duas situa-

ções:

$$1) \quad F(\underline{\sigma}_0 + \underline{d\sigma}, \bar{\epsilon}_p) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} d\epsilon^e \neq 0 \\ d\epsilon^p = 0 \end{cases}$$

O estado de tensões $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \underline{d\sigma}$ encontra-se no interior ou sobre a superfície de escoamento (Fig. 4.2).

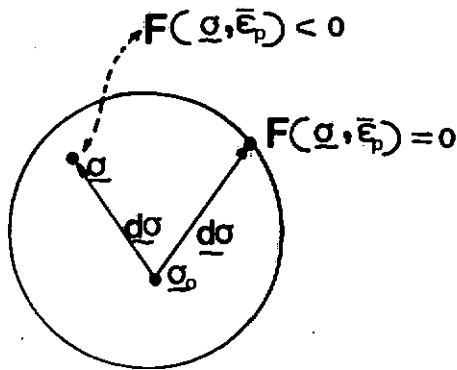


FIG.[4. 2]

$$2) \quad F(\underline{\sigma}_0 + \underline{d\sigma}, \bar{\epsilon}_p) > 0 \rightarrow \begin{cases} d\epsilon^e \neq 0 \\ d\epsilon^p \neq 0 \end{cases}$$

Agora o estado de tensões $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \underline{d\sigma}$ encontra-se fora da superfície de escoamento. Como $\underline{\sigma}_0$ está na região elástica ($F(\underline{\sigma}_0) < 0$) é necessário que se determine um parâmetro r , de tal modo que:

$$F(\underline{\sigma}_0 + r\underline{d\sigma}, \bar{\epsilon}_p) = 0$$

Este parâmetro pode ser obtido diretamente da equação de escoamento.

Introduz-se $\bar{\sigma} = \sigma_0 + r \, d\sigma$ na equação $\sqrt{3} \sqrt{J_2} = \bar{\sigma}_e$ extraíndo-se o valor de r , o qual é dado por :

$$r = \frac{(-B + \sqrt{B^2 - S \times T})}{S} \quad (4.52)$$

onde,

$$S = DX^2 + DY^2 + DZ^2 + 2 \times DS^2$$

$$B = S_x \times DX + S_y \times DY + S_z \times DZ + 2 \times \tau_{xy} \times DS$$

$$T = S_x^2 + S_y^2 + 2 \times \tau_{xy}^2 + S_z^2 - \frac{2}{3} \times \bar{\sigma}_e^2$$

$$DM = \frac{(d\sigma_x + d\sigma_y + d\sigma_z)}{3}$$

$$DX = d\sigma_x - DM$$

$$DY = d\sigma_y - DM$$

$$DZ = d\sigma_z - DM$$

$$DS = d\tau_{xy}$$

O estado de tensões $\bar{\sigma} = \sigma_0 + r \, d\sigma$ encontra-se sobre a superfície de escoamento, o que permite a partir de $\bar{\sigma}$ calcular o incremento de tensões $d\bar{\sigma}$ em regime elasto-plástico.

Com o valor de r pode-se definir também a parcela do incremento de deformações $d\bar{\epsilon}$, na qual ocorrem deformações plásticas:

$$d\bar{\epsilon} = (1 - r) d\bar{\epsilon} \quad (4.53)$$

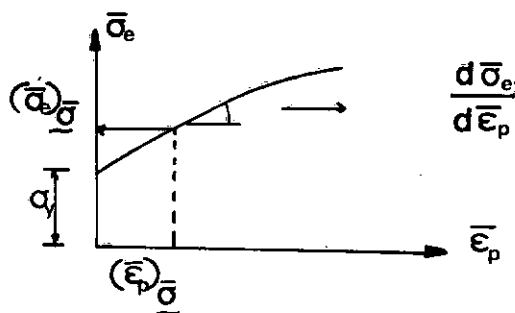
O estado de tensões $\bar{\sigma}$ sobre a superfície de escoamento atualizada é fornecido por:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma} + \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{D}_{ep} d\bar{\epsilon} \quad (4.54)$$

onde

$$(\bar{D}_{ep})_0 = \left\{ \bar{D} - \frac{\bar{D} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \right\}_{\bar{\sigma}} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \right\}_{\bar{\sigma}}^T \cdot \bar{D}}{\left(\frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p} \right)_{\bar{\sigma}} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \right\}_{\bar{\sigma}}^T \cdot \bar{D} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \right\}_{\bar{\sigma}}} \right\} \quad (4.55)$$

e $\left(\frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p} \right)_{\bar{\sigma}}$ é obtido diretamente da curva $(\bar{\sigma}_e \times \bar{\epsilon}_p)$.



Observação:

$(\bar{\epsilon}_p)_{\bar{\sigma}}$ é a deformação plástica efetiva acumulada durante o escoamento do material até a última superfície de escoamento gerada, para a qual $f(\bar{\sigma}) = (\bar{\sigma}_e)_{\bar{\sigma}}$.

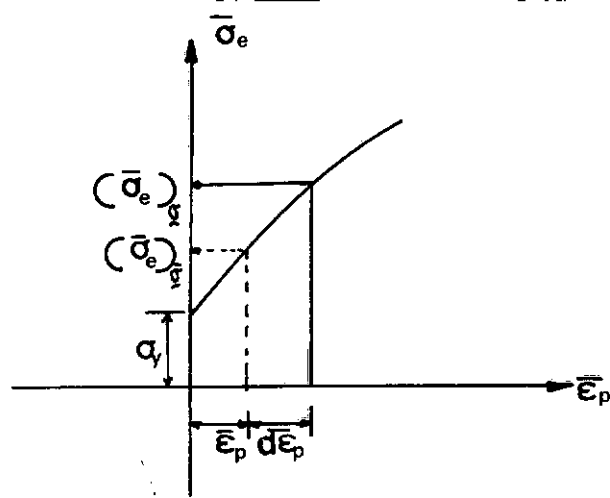
Além do incremento de tensões elasto-plásticas em (4.54) deve-se também calcular o incremento de deformação plástica efetiva associada a $d\bar{\epsilon}$:

$$d\bar{\epsilon}_p = d\lambda = \int_0^{d\bar{\epsilon}} \frac{\bar{a}^T \cdot \bar{D}}{A + \bar{a}^T \cdot \bar{D} \cdot \bar{a}} \cdot d\bar{\epsilon} \quad (4.56)$$

onde,

$$\left. \frac{\bar{a}^T \cdot \bar{D}}{A + \bar{a}^T \cdot \bar{D} \cdot \bar{a}} \right|_0 = \frac{\left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \right)_{\bar{\sigma}}^T \cdot \bar{D} \right\}}{\left(\frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p} \right)_{\bar{\sigma}} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \right\}_{\bar{\sigma}} \cdot \bar{D} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \right\}_{\bar{\sigma}}} \quad (4.57)$$

Como $d\lambda = d\bar{\epsilon}_p$, adiciona-se este valor a $(\bar{\epsilon}_p)_{\bar{\sigma}}$ de modo a obter o $\bar{\sigma}_e$ atualizado, responsável pela nova superfície de escoamento (Fig. 4.3).



$$R_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a_y$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\bar{\sigma}_e)_g$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\bar{\sigma}_e)_g$$

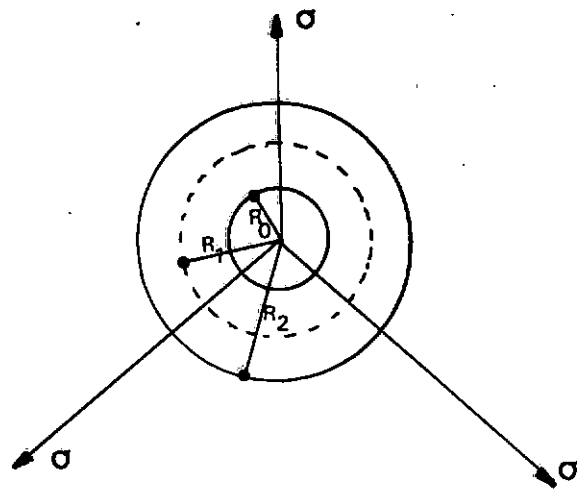


FIG. [4.3]

As integrais em (4.54) e (4.56) são calculadas numericamente por subdivisões de $d\bar{\epsilon}$ e a cada passo da integração uma correção adicional deve ser feita:

$$\bar{\sigma}_+^i = \bar{\sigma}_+^{i-1} (D_{ep})_{\bar{\sigma}_+^{i-1}} \cdot \delta\bar{\epsilon} \quad (4.58)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$\bar{\epsilon}_p^i = \bar{\epsilon}_p^{i-1} + \left(\frac{\bar{a}^T \cdot \bar{D}}{A + \bar{a}^T \cdot \bar{D} \cdot \bar{a}} \right)_{\bar{\sigma}_+^{i-1}} \cdot \delta\bar{\epsilon} \quad (4.59)$$

$$i = 1, \dots, n$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}^0 = \underline{\sigma} \\ \underline{\bar{\epsilon}}_p^0 = (\bar{\epsilon}_p)_{\underline{\sigma}} \\ \underline{\delta\epsilon} = \frac{d\epsilon}{n} \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}^n = \underline{\sigma} \\ \underline{\bar{\epsilon}}_p^n = (\bar{\epsilon}_p)_{\underline{\sigma}} + d\bar{\epsilon}_p \end{array} \right.$$

onde n é fornecido semi-empiricamente e sugestões quanto à sua obtenção podem ser encontradas nas refs. [4.2 e 4.13].

Calculado o estado de tensões $\underline{\sigma}^i$ do i -ésimo incremento, em (4.58) e a correspondente tensão efetiva, tem-se o seguinte erro:

$$f(\underline{\sigma}^i) - (\bar{\sigma}_e)_{\underline{\sigma}^i} = F_1 \neq 0 \quad (4.60)$$

Adota-se aqui a mesma correção utilizada na ref. [4.2], na qual o incremento corretivo de tensões $\underline{\delta\sigma}$ é considerado normal à superfície de escoamento:

$$\underline{\delta\sigma} = k \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i} \quad (4.61)$$

$$F(\underline{\sigma}^i, \bar{\epsilon}_p) = F_1 \rightarrow$$

$$F_1 + dF = 0$$

onde

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i}^T \delta \underline{\sigma} \quad (4.62)$$

Substituindo (4.61) em (4.62):

$$F_1 + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i}^T \cdot k \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i} = 0 \rightarrow$$

$$k = - \frac{F_1}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i}^T \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i}} \quad (4.63)$$

O incremento corretivo é então dado por:

$$\delta \underline{\sigma} = - \frac{F_1}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i}^T \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i}} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}_{\underline{\sigma}^i} \rightarrow \quad (4.64)$$

$$F(\underline{\sigma}^i + \delta \underline{\sigma}) \approx 0 \quad (4.65)$$

Após o término da sequência de cálculo anterior tem-se o estado de tensões (do ponto de integração em estudo) corrigido à superfície de escoamento atualizada ao campo de deformações correspondente.

A formulação elasto-plástica anterior ao ser aplicada a materiais com comportamento plástico-perfeito utiliza a mesma sequência de cálculo, porém com as seguintes características:

$\bar{\sigma}_e$ - constante durante o escoamento

$$\frac{d\bar{\sigma}_p}{d\bar{\epsilon}_p} = 0 \text{ (zero)}$$

Quando o estado de tensões $\underline{\sigma}_0$ encontra-se sobre a superfície de escoamento e devido a ação de um agente externo ocorre um incremento de deformações $d\epsilon$, suposto inicialmente em regime elástico, duas situações poderiam ocorrer:

$$\begin{aligned} 1) \quad & F(\underline{\sigma}_0 + \underline{D} \cdot d\epsilon, \bar{\epsilon}_p) < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} d\epsilon^e \neq 0 \\ d\epsilon^p = 0 \end{array} \right. \quad - \text{descarregamento} \\ 2) \quad & F(\underline{\sigma}_0 + \underline{D} \cdot d\epsilon, \bar{\epsilon}_p) > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} d\epsilon^e \neq 0 \\ d\epsilon^p \neq 0 \end{array} \right. \quad - \text{carregamento} \end{aligned}$$

No segundo caso se utilizaria o mesmo processo anterior para o cálculo do estado de tensões final, porém o parâmetro r seria zero.

Observação:

A matriz elasto-plástica em (4.55) e o parâmetro $d\lambda$ em (4.56) estão apresentados na forma em que são utilizados para solução de estado plano de tensões e sólidos axissimétricos. Em problemas de estado plano de deformações estas são alteradas pelo acréscimo no denominador do termo $E \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right)^2$ e da utilização do vetor a apropriado (equação (4.49)).

4.3 - FORMULAÇÃO ELASTO-PLÁSTICA ASSOCIADA AO CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB

No Capítulo III são estudados dois critérios: Mohr-Coulomb "Tradicional" e Mohr-Coulomb "Modificado". Ambos não apresentam explicitamente funções de escoamento e serão analisados somente para o comportamento plástico-perfeito.

Mohr-Coulomb Tradicional (equação (3.63))

$$f_1(\underline{\sigma}) = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cdot \cos \phi$$

Mohr-Coulomb Modificado (equação (3.91))

$$f_2(\underline{\sigma}) = \alpha \sigma_m^2 + \beta \sigma_m + \gamma + \left(\frac{\bar{\sigma}}{h(\theta)} \right)^2$$

Por conveniência, todas as variáveis envolvidas são especificadas novamente:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (4.66)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{J_2} = \sqrt{0.50 (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad (4.67)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3} \right) ; -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (4.68)$$

$$J_3 = S_x S_y S_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \tau_{xy}^2 S_z - S_x \tau_{yz}^2 - S_z \tau_{xy}^2 \quad (4.69)$$

$$\alpha = \frac{-12 \sin^2 \phi}{(3 - \sin \phi)^2} \quad (4.70)$$

$$\beta = \frac{24 c \cos \phi \operatorname{sen} \phi}{(3 - \operatorname{sen} \phi)^2} \quad (4.71)$$

$$\gamma = \frac{12 (XA^2 \operatorname{sen}^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi)}{(3 - \operatorname{sen} \phi)^2} \quad (4.72)$$

A matriz constitutiva elasto-plástica de ambos os critérios é deduzida com base na lei associativa de escoamento, (ref. [3.11]):

$$d\tilde{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (4.73)$$

e na condição de escoamento:

$$f(\tilde{\sigma}) = 0 \quad \text{e} \quad df = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}^T d\tilde{\sigma} = 0 \quad (4.74)$$

Com (4.73) e (4.74) a matriz constitutiva é obtida de forma idêntica à correspondente ao critério de von Mises, resultando em:

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \cdot \underline{D}}{\underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} d\tilde{\varepsilon} \quad (4.75)$$

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \frac{\underline{D} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D}}{\underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \quad (4.76)$$

onde

$$\underline{a} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (4.77)$$

e

$$A = 0$$

As equações (4.75), (4.76) e (4.77) se aplicam ao estado plano de tensões e sólidos axissimétricos, porém em estruturas caracterizadas por estado plano de deformações estas equações são modificadas pela alteração do parâmetro A e vetor \underline{a} como apresentado em (4.49) e (4.50), resultando em:

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \cdot \underline{D}}{E\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\right)^2 + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} d\epsilon \quad (4.78)$$

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \frac{\underline{D} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D}}{E\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\right)^2 + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \quad (4.79)$$

$$\underline{a} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \end{array} \right\} \quad (4.80)$$

As equações dos critérios de Mohr-Coulomb Tradicional e Mohr-Coulomb Modificado são funções explícitas de σ_m , $\bar{\sigma}$ e J_3 . Por este motivo, os gradientes de $f_1(\underline{\sigma})$ e $f_2(\underline{\sigma})$ são fornecidos por:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) = \frac{\partial f_1(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial \underline{\sigma}} = C_1 \cdot \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\sigma}} + C_2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} + C_3 \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma}(\sigma) = \frac{\partial f_2(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial \sigma} = C_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + C_2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} + C_3 \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (4.82)$$

onde, em (4.81)

$$C_1 = \frac{\partial f_1(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial \sigma_m} \quad (4.83)$$

$$C_2 = \frac{\partial f_1(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial \bar{\sigma}} \quad (4.84)$$

$$C_3 = \frac{\partial f_1(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial J_3} \quad (4.85)$$

Em (4.82)

$$C_1 = \frac{\partial f_2(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial \sigma_m} \quad (4.86)$$

$$C_2 = \frac{\partial f_2(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial \bar{\sigma}} \quad (4.87)$$

$$C_3 = \frac{\partial f_2(\sigma_m, \bar{\sigma}, J_3)}{\partial J_3} \quad (4.88)$$

Todas as constantes anteriores estão fornecidas nas Tabelas 4.1 e 4.2.

$$C_1 = \sin \phi$$

$$C_2 = \cos \theta \left[(1 + \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} 3 \theta) + \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \cdot (\operatorname{tg} 3 \theta - \operatorname{tg} \theta) \right]$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3} \left[\sin \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \phi \cos \theta \right]}{2 \sigma^2 \cos 3 \theta}$$

TABELA 4.1 - MOHR-COULOMB TRADICIONAL APRESENTADAS POR NAYAK & ZIENKIEWICZ
Refs. [4.2, 4.5]

$$C_1 = 2 \alpha \sigma_m + \beta$$

$$C_2 = \frac{\bar{\sigma}}{2K^2} \left[(1+k) - (1-k) \sin 3\theta \right]^2 + \left[(1+k) - (1-k) \sin 3\theta \right] \cdot \left[3(1-k) \right] \cdot \cos 3\theta \cdot \operatorname{tg} 3\theta$$

$$k = \frac{(3 - \sin \phi)}{(3 + \sin \phi)}$$

$$C_3 = \frac{\left[(1+k) - (1-k) \sin 3\theta \right] \cdot 3 \sqrt{3} \cdot \left[(1-k) \right]}{4 k^2 \bar{\sigma}}$$

TABELA 4.2 - MOHR-COULOMB MODIFICADO DEDUZIDAS NO PRESENTE ESTUDO

Definidas as constantes C_1 , C_2 e C_3 de ambos os critérios de escoamento, apresenta-se a seguir o gradiente da função de carregamento para cada um dos tipos de sistemas estruturais estudados:

$$\underline{a} = C_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\sigma}} + C_2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} + C_3 \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}}$$

onde

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\sigma}}, \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} \text{ e } \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}}$$

estão apresentados nas refs. [4.2 e 4.5].

SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS

$$\underline{a} = \frac{C_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{C_2}{2\bar{\sigma}} \begin{Bmatrix} S_r \\ S_z \\ 2\tau_{rz} \\ S_\theta \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} S_z S_\theta \\ S_r S_\theta \\ -2 S_\theta \tau_{rz} \\ S_r S_z - \tau_{rz}^2 \end{Bmatrix} + \frac{C_3 \bar{\sigma}^2}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\underline{a} = \frac{C_1}{3} \begin{Bmatrix} (1 + \nu) \\ (1 + \nu) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{C_2}{2\bar{\sigma}} \begin{Bmatrix} S_x + \nu S_z \\ S_y + \nu S_z \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} S_y S_z + \nu (S_x S_y - \tau_{xy}^2) \\ S_x S_z + \nu (S_x S_y - \tau_{xy}^2) \\ - 2S_z \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \frac{C_3 \bar{\sigma}^2}{3} \begin{Bmatrix} (1 + \nu) \\ (1 + \nu) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O termo $E \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \right)^2$ encontrado no denominador de (4.78) e (4.79) é então definido por:

$$E \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \right)^2 = E \cdot \left(\frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2\bar{\sigma}} S_z + C_3 (S_x S_y - \tau_{xy}^2) + \frac{C_3 \bar{\sigma}^2}{3} \right) \quad (4.91)$$

ESTADO PLANO DE TENSÕES

$$\underline{a} = \frac{C_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{C_2}{2\bar{\sigma}} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} S_y S_z \\ S_x S_z \\ -2S_z \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \frac{C_3 \bar{\sigma}^2}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

4.3.1 - História de Tensões e Deformações para o Modelo Elasto-Plástico de Mohr-Coulomb

Seja um ponto material submetido a um estado de tensões $\underline{\sigma}_0$ correspondente a um campo de deformações $\underline{\epsilon}_0$ na região elástica, interior à superfície de escoamento. Devido à ação de um agente externo é adicionado a $\underline{\epsilon}_0$ um incremento $d\underline{\epsilon}$ o qual é considerado inicialmente em regime elástico, o que implica em:

$$d\underline{\sigma} = \underline{D} d\underline{\epsilon} \quad (4.93)$$

Somando-se $d\underline{\sigma}$ a $\underline{\sigma}_0$, podem ocorrer duas situações:

$$1) \quad f(\underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} d\underline{\epsilon}^e \neq 0 \\ d\underline{\epsilon}^p = 0 \end{cases}$$

O estado de tensões encontra-se no interior ou sobre a superfície de escoamento.

$$2) \quad f(\underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}) > 0 \rightarrow \begin{cases} d\underline{\varepsilon}^e \neq 0 \\ d\underline{\varepsilon}^p \neq 0 \end{cases}$$

O estado de tensões $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}$ está fora da superfície de escoamento. Como $f(\underline{\sigma}_0) < 0$ é necessário que se determine um parâmetro "r", de tal modo que:

$$f(\underline{\sigma}_0 + r d\underline{\sigma}) \approx 0 \quad (4.94)$$

No critério de von Mises o parâmetro "r" é obtido diretamente da equação de escoamento, porém nos critérios de Mohr-Coulomb a transição entre a região elástica e plástica é determinada iterativamente através de aproximações lineares. Neste processo admite-se que a variação da função de escoamento seja linear entre os estados de tensões $\underline{\sigma}_0$ e $\underline{\sigma}$. Como mostra a seguir, a equação $d\underline{\varepsilon}_i = (1 - r) d\underline{\varepsilon}$ não pode ser usada em casos de mais de uma iteração. O incremento $d\underline{\varepsilon}$ resulta da diferença entre a deformação final $\underline{\varepsilon}$ associada ao estado de tensões $\underline{\sigma}$ (fora da superfície) e a deformação $\bar{\underline{\varepsilon}}$ calculada iterativamente, a qual corresponde ao estado de tensões $\bar{\underline{\sigma}}$ sobre a superfície.

A equação que fornece r a cada passo da iteração decorre da seguinte dedução:

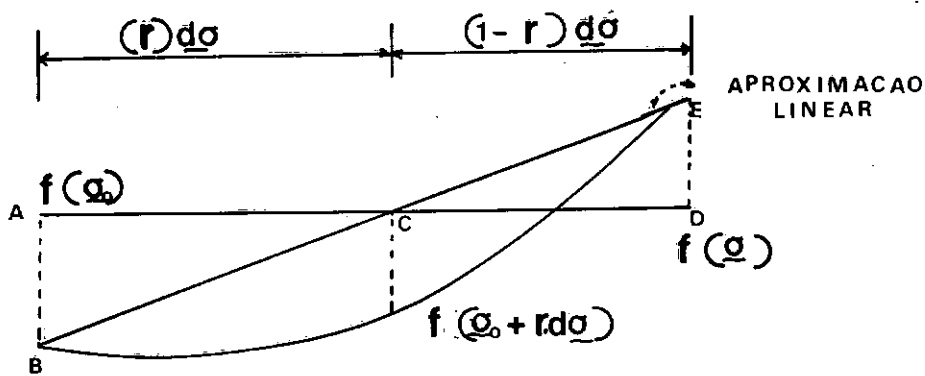


FIG.[4.4]

Na Fig. 4.4, os triângulos abc e cde são semelhantes. Aproveitando-se deste fato determina-se r (ref.[4.2]):

$$- f(\sigma_0) (1 - r) \cdot d\sigma = f(\sigma) \cdot r d\sigma$$

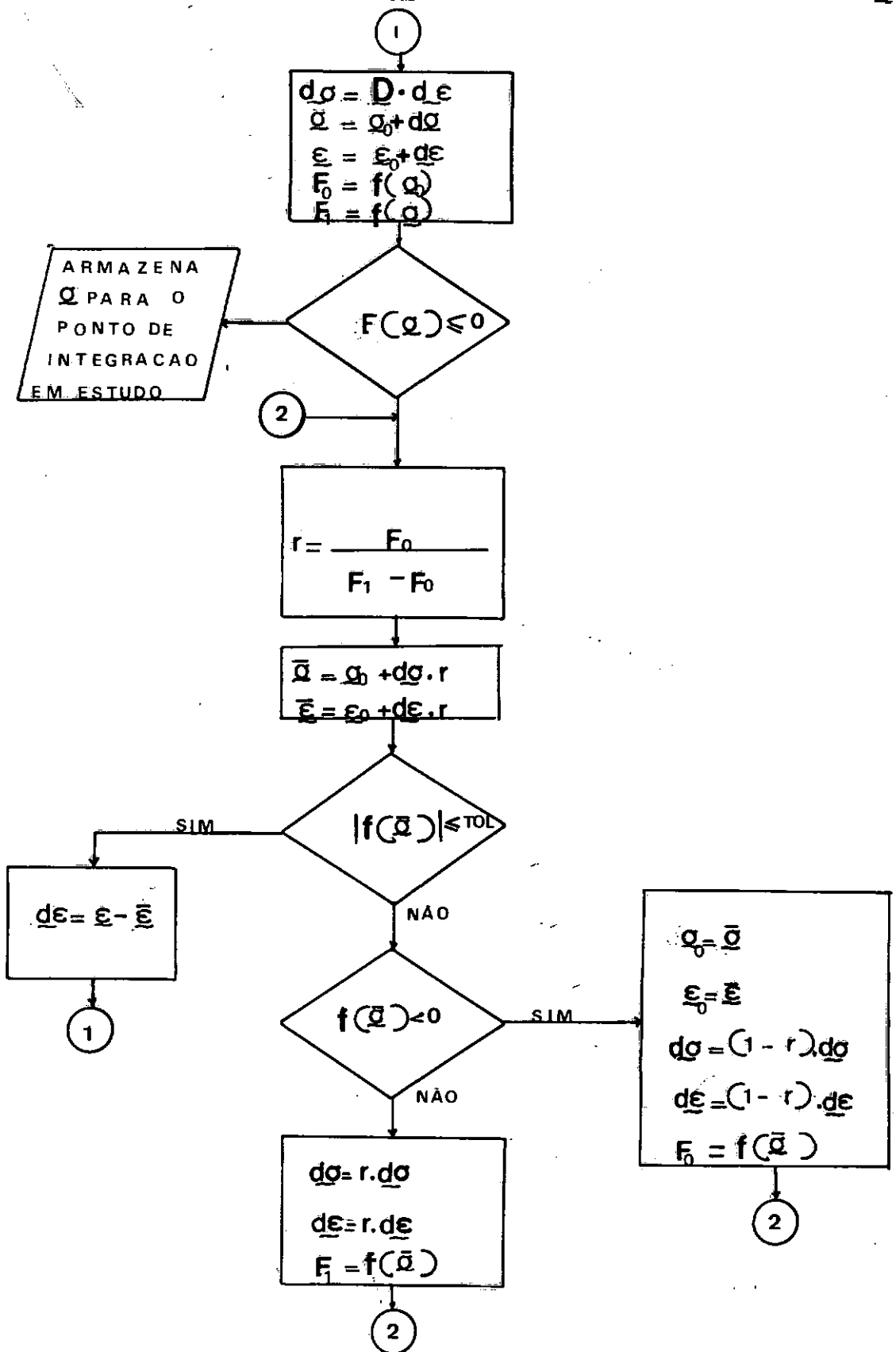
$$- f(\sigma_0) d\sigma + f(\sigma_0) r d\sigma = f(\sigma) \cdot r \cdot d\sigma$$

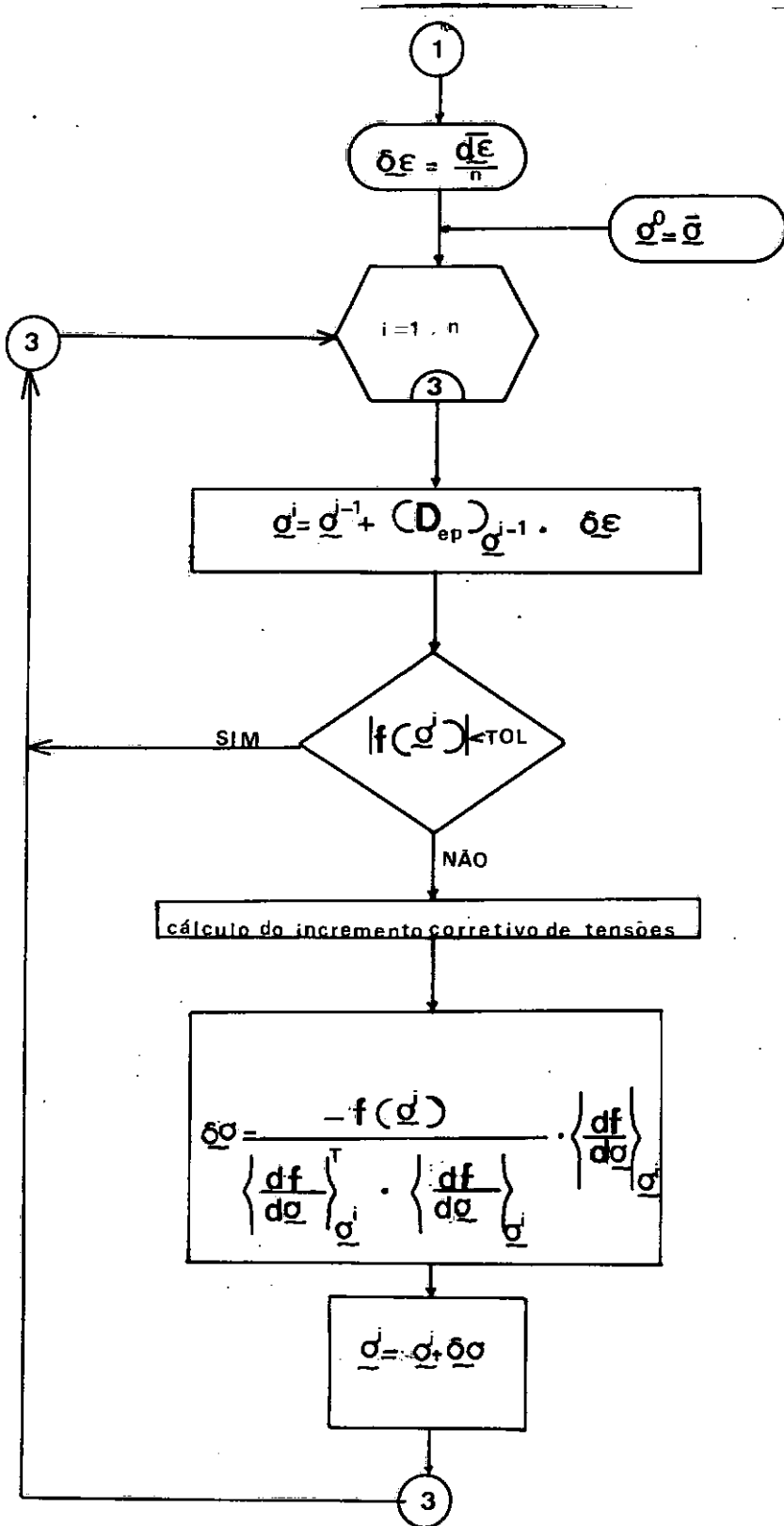
$$r = - \frac{f(\sigma_0)}{f(\sigma) - f(\sigma_0)} = - \frac{F_0}{F_1 - F_0} \quad (4.95)$$

onde

$$F_0 = f(\sigma_0) ; F_1 = f(\sigma)$$

Estabelecida a fórmula que fornece explicitamente o valor de r o processo iterativo fica totalmente definido. Na Fig. 4.5 este é apresentado em fluxograma, incluindo também a aplicação da formulação elasto-plástica sobre $d\bar{\epsilon}$.





ao término da recursividade (3) tem-se o estado de tensões corrigido e atualizado à superfície de escoamento

FIG. [4.5]

Ao término da recursividade 3 tem-se calculado o estado de tensões $\underline{\sigma}$ atualizado (do ponto de integração em estudo) e corrigido à superfície de escoamento.

Quando o estado de tensões $\underline{\sigma}_0$ encontra-se sobre a superfície de escoamento e a este é adicionado um incremento $d\underline{\sigma}$ (inicialmente elástico), duas condições podem ocorrer:

$$1) \quad f(\underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}) < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} d\underline{\epsilon}^e \neq 0 \\ d\underline{\epsilon}^p = 0 \end{array} \right. \quad \text{descarregamento}$$

O estado de tensões $\underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}$ está na região elástica, no interior da superfície de escoamento.

$$2) \quad f(\underline{\sigma}_0 + d\underline{\sigma}) > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} d\underline{\epsilon}^e \neq 0 \\ d\underline{\epsilon}^p \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{carregamento}$$

O estado de tensões está fora da superfície de escoamento. O incremento elasto-plástico de tensões é calculado pelo mesmo procedimento anterior, com $r = 0$, avançando diretamente à etapa (1) do fluxograma.

V - MODELO DE INTERFACE

Frequentemente os sistemas estruturais são formados por um conjunto de "meios" que interagem entre si através de interfaces (ou superfícies de separação), as quais podem ser classificadas como descontinuidades de contorno cinemático.

Em dinâmica, o comportamento físico dessas interfaces exige um tratamento mais cauteloso, tanto no que diz respeito ao desenvolvimento teórico do modelo matemático, como na análise experimental. Dentro desta área, os problemas relacionados com a interação solo-estrutura agrupam-se em uma sub-área de pesquisa, à qual já existe um grande número de modelos implementados, refs. [5.3, 5.4, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16] e outros.

No presente estudo as interfaces são simuladas por um elemento especial, conhecido por elemento de junta, cujo nome decorre de sua usual aplicação na análise estática de maciços rochosos, refs. [5.1, 5.2, 5.6, 5.8].

5.1 - COMPORTAMENTO FÍSICO DE UMA INTERFACE

Uma descontinuidade em um maciço rochoso ou em um modelo estrutural qualquer, Fig. 5.1, pode ser razoavelmente definida em suas dimensões geométricas e é classificada como junta. Uma característica favorável e necessária à análise de uma junta é a pequena espessura, o que permite relacionar o seu comportamento físico com os deslocamentos relativos entre as duas superfícies que a delimitam (segundo a direção longitudinal). Goodman, refs. [5.1 e 5.6], em seu modelo matemático e experimental não considera a espessura, porém no presente estudo, como na ref. [5.2]

a mesma é utilizada com a finalidade de tornar adimensional o campo de deformações. Esta característica é importante no estudo de sólidos axissimétricos (ítem 5.3).

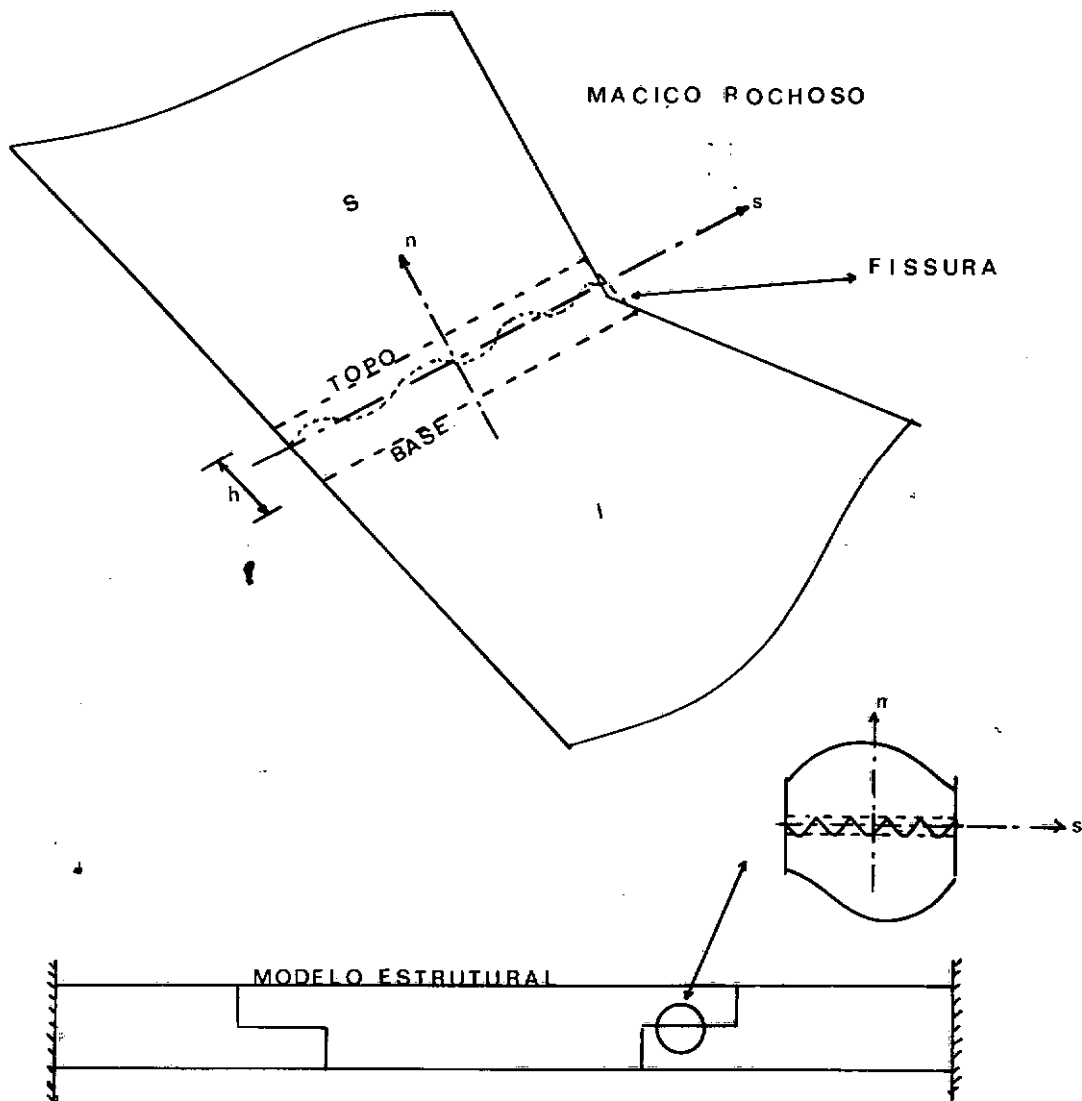


FIG. [5.1]

A deformabilidade de uma junta é analisada segundo duas propriedades físicas:

- rigidez à deformação normal
- rigidez à deformação cisalhante

Ambas são obtidas por intermédio de modelos reduzidos ou através de ensaios realizados com amostras representativas ou artificiais.

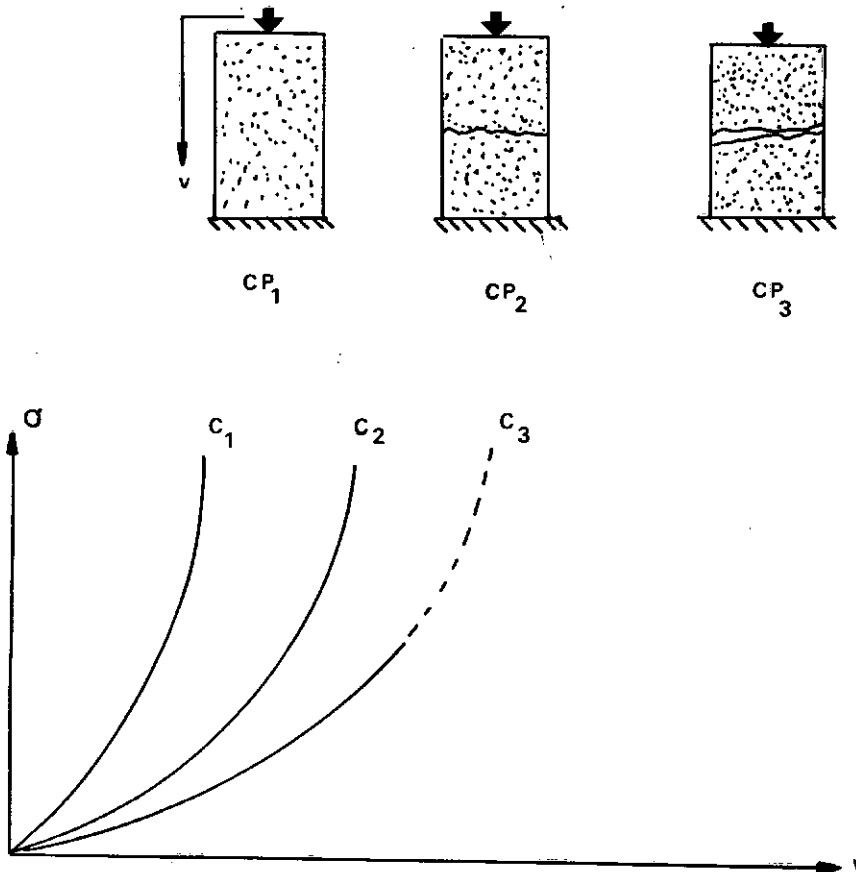


FIG. [5.2]

Normalmente as juntas se caracterizam pela relação não-linear entre (tensão x deformação), sendo tal comportamento evidenciado experimentalmente. Por exemplo, na Fig. 5.2, ilustra-se o ensaio à deformação normal de um corpo de prova em três situações diferentes:

- cp_1 - corpo de prova virgem
- cp_2 - é o mesmo corpo de prova cp_1 dotado de uma fissura criada artificialmente
- cp_3 - é o corpo de prova cp_2 , com a disposição da fissura alterada, por exemplo, por um giro da parte superior.

Como resultado dos ensaios em cp_1 , cp_2 e cp_3 , tem-se as curvas c_1 , c_2 e c_3 respectivamente. Subtraindo-se a parcela de deslocamentos associada à curva c_1 das curvas c_2 e c_3 , obtém-se a relação $(\sigma \times \epsilon)$ não-linear de ambas as fissuras, Fig. 5.3. É visível nas curvas $c_2 - c_1$ e $c_3 - c_1$ a variação do coeficiente de rigidez.

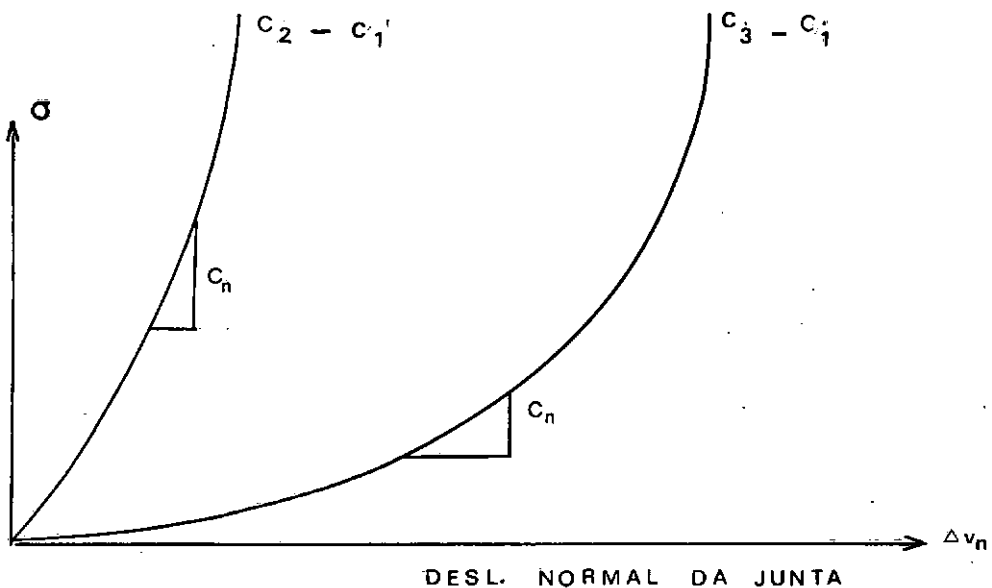


FIG. [5.3]

A rigidez à deformação cisalhante de uma junta é também uma propriedade não-linear e é conseguida por ensaios apropriados dotados de controle da tensão normal aplicada. Na Fig. 5.4 ilustra-se o esquema do ensaio e uma curva típica para vários níveis de tensão normal.

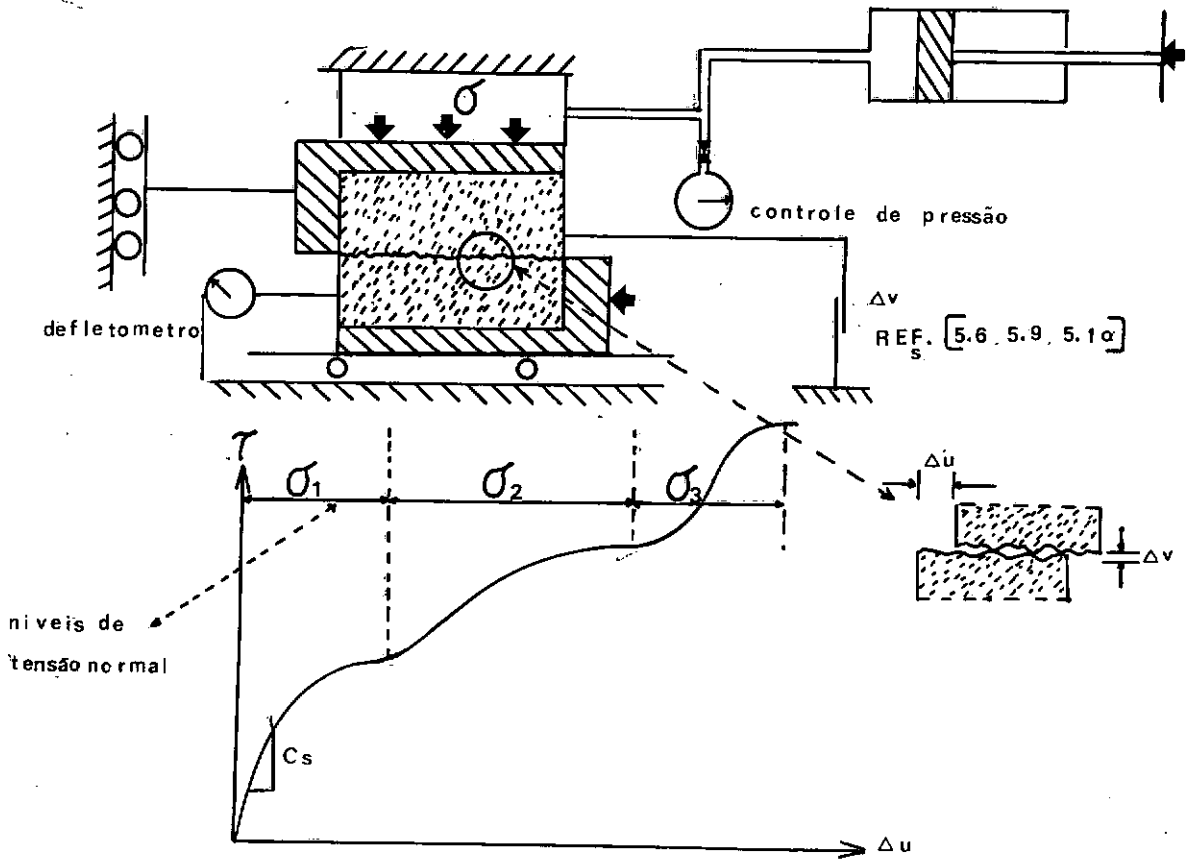


FIG. [5.4]

É interessante observar a forma assumida pela curva ($\tau \times \Delta u$) com a variação da tensão normal aplicada. As instabilidades durante a deformação tangencial são associadas com a liberação súbita de energia quando as tensões cisalhantes atingem o valor máximo para o nível de tensão normal aplicado. A importância de se ter o controle da tensão normal reside na possibilidade de verificar o fenômeno de dilatância. A partir deste, costuma-se classificar as juntas em duas categorias: dilatantes quando durante a deformação cisalhante há expansão ou contração

(o que indica o acoplamento existente entre a deformação normal e a cisalhante) e não dilatantes em caso contrário.

No presente estudo apenas as juntas não-dilatantes são analisadas, porém nas referências [5.2 e 5.10] um tratamento adequado ao comportamento dilatante é apresentado.

Para uma junta não-dilatante a matriz constitutiva utilizada na formulação do modelo matemático é desacoplada, sendo dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_n \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

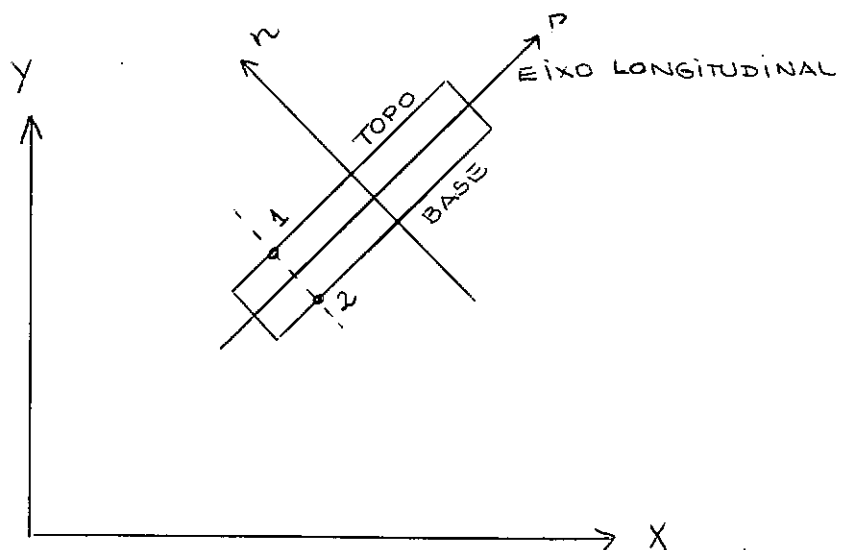
onde,

C_s - coeficiente de rigidez cisalhante

C_n - coeficiente de rigidez normal

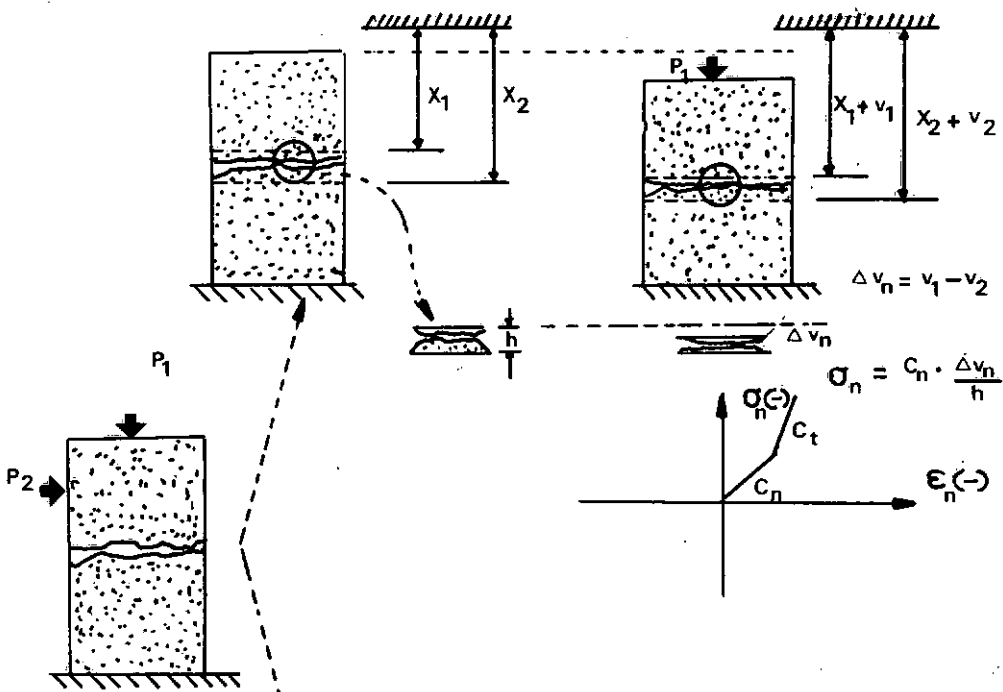
$$\epsilon_s = \frac{\Delta u_s}{h}$$

$$\epsilon_n = \frac{\Delta v_n}{h}$$



Os termos Δu_s e Δv_n são os deslocamentos relativos entre dois pontos 1 e 2 pertencentes respectivamente ao topo e à base do elemento em uma mesma direção normal ao eixo longitudinal. O modo como estes deslocamentos relativos são calculados a partir do comportamento físico é ilustrado na Fig. 5.5, para um problema simples, em que os deslocamentos relativos impostos são constantes segundo a direção longitudinal.

DEFORMAÇÃO NORMAL



DEFORMAÇÃO C ISALHANTE

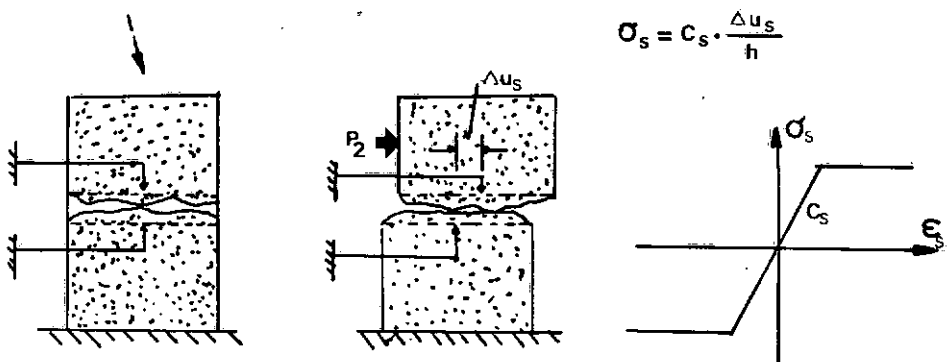
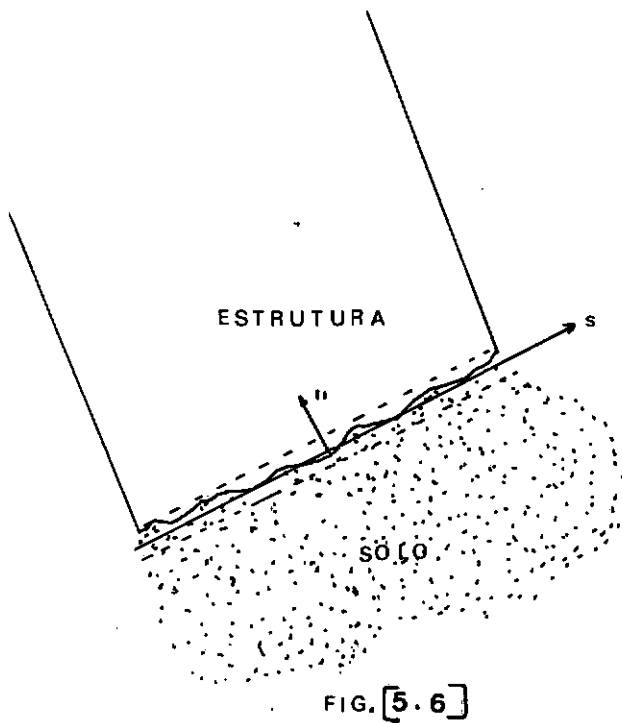


FIG. [5.5]

Ao se estender o estudo anterior aos problemas de interação solo-estrutura, Fig. 5.6, as juntas recebem a denominação mais geral de "Interface". Um número de fatores podem contribuir para a complexidade do comportamento da interface. Estes fatores podem incluir a modificação das propriedades do solo devido à migração de umidade e amolgamento, possibilidade da ruptura ocorrer em zonas fora da interface e dificuldades na obtenção dos parâmetros físicos.



Na interface, devido à baixa resistência introduzida pelo solo, predomina o comportamento não-dilatante, o que conduz a uma matriz constitutiva desacoplada. Como mencionado na ref. [5.3], o coeficiente de rigidez à deformação normal pode ser escolhido arbitrariamente, porém, para a análise dinâmica, o seu valor exerce uma influência muito grande no comportamento da interface. Valores elevados próximos à rigidez do material da estrutura podem conduzir à reflexão das ondas de pressão, des

ligamento das superfícies ou instabilidade na integração no tempo. Por observação da propagação das ondas de pressão, pode-se concluir que o coeficiente de rigidez à deformação normal da interface é controlado pela rigidez do solo.

A importância fundamental do elemento de interface em problemas de interação é permitir o movimento relativo entre os dois meios. Por este motivo a análise da interface, quando submetida a deformações cisalhantes, é mais criteriosa. Para isto existem alguns tipos de ensaios levando em consideração efeitos estáticos e dinâmicos (ref. [5.3]).

As juntas ou interfaces devem ser analisadas também quanto ao sinal da deformação normal. Se esta for de tração, indica que houve um desligamento da descontinuidade no referido ponto, o que conduz a um estado de tensão nulo. Esta condição, em dinâmica, não é definitiva, podendo o mesmo ponto vir a fechar-se num tempo t posterior. Após tal ocorrência, considerações sobre a mudança das propriedades físicas do material da interface são necessárias, sendo a escolha do novo comportamento função do problema em estudo.

É conveniente salientar que o tratamento matemático apresentado nos Itens 5.2 e 5.3 é aplicado tanto nas juntas como nas interfaces. A diferença reside somente na escolha adequada de ensaios e parâmetros físicos.

5.2 - MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTADO PLANO DE TENSÕES E ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Conhecido o comportamento físico das interfaces (item 5.1) e sabendo-se que este é analisado em função dos deslocamentos relativos entre o topo e a base do elemento, desenvolve

-se agora o respectivo modelo matemático. A continuidade do campo de deslocamentos relativos no domínio do elemento é conseguida por interpolação dos respectivos valores nodais, sendo esta conduzida segundo a direção longitudinal do elemento de interface. Inicialmente os modelos são desenvolvidos assumindo-se variação quadrática dos deslocamentos, mais tarde particularizados para variação linear.

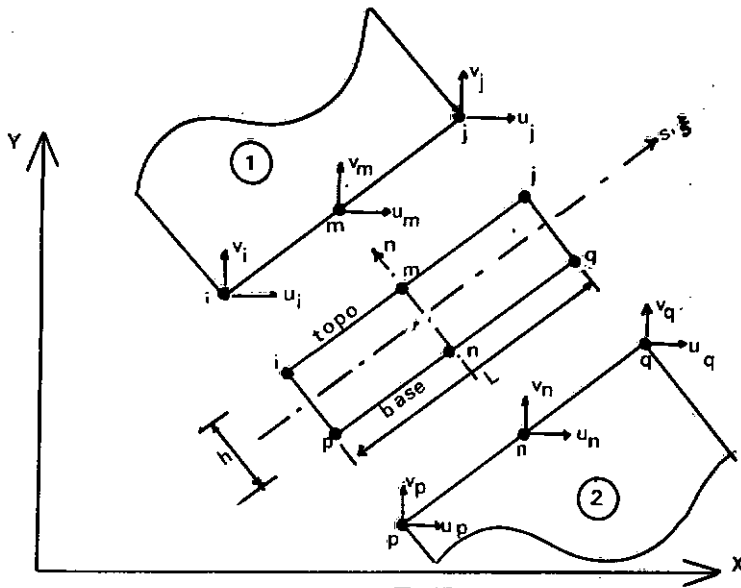
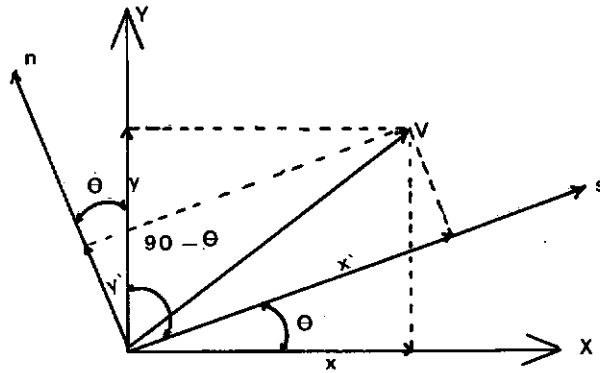
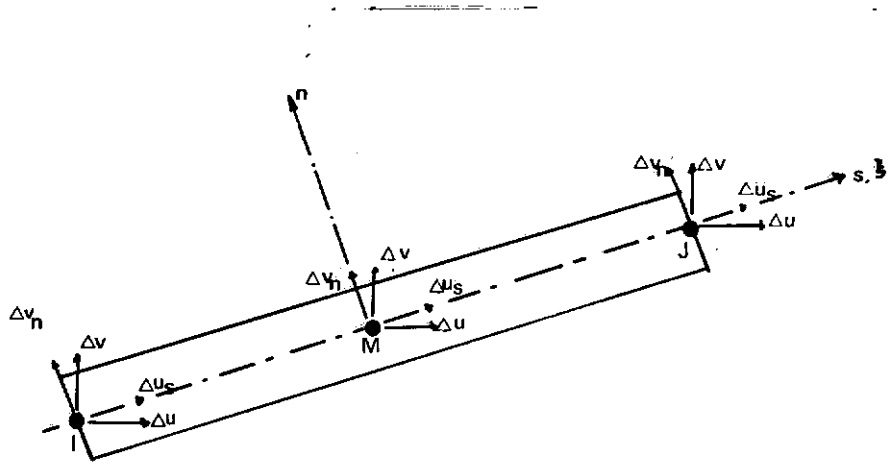


FIG. [5.7]

Para o elemento de interface apresentado na Fig. 5.7, os deslocamentos relativos nodais são definidos por:

$$\begin{aligned}
 u_i &= u_p + \Delta u_i \\
 v_i &= v_p + \Delta v_i \\
 u_m &= u_n + \Delta u_m \\
 v_m &= v_n + \Delta v_m \\
 u_j &= u_q + \Delta u_j \\
 v_j &= v_q + \Delta v_j
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Com os deslocamentos relativos referidos ao sistema global, deve-se obter os deslocamentos relativos referidos ao sistema local ($s \times n$), o que pode ser feito com o uso da matriz de rotação convencional (Fig. 5.8).



$$a = \cos \Theta$$

$$b = \sin \Theta$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

FIG. [5.8]

Esta transformação é atendida por:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{SISTEMA LOCAL} & & \text{SISTEMA GLOBAL} \\
 \left\{ \begin{array}{l} (\Delta u_s)_i \\ (\Delta v_n)_i \\ (\Delta u_s)_m \\ (\Delta v_n)_m \\ (\Delta u_s)_j \\ (\Delta v_n)_j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{array} \right\}
 \end{array} \quad (5.3)$$

onde,

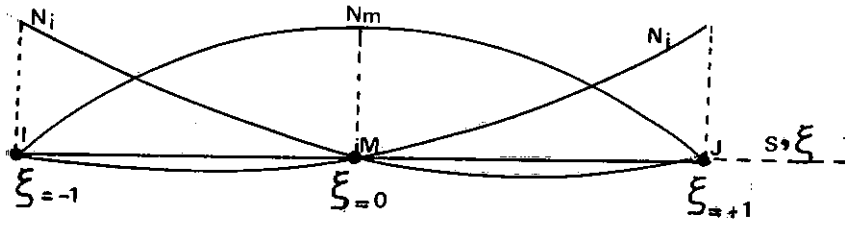
$$a = \cos \theta$$

$$b = \sin \theta$$

A partir dos deslocamentos relativos nodais referidos ao sistema local, define-se o campo de deslocamentos relativos no domínio do elemento:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_s &= N_i (\Delta u_s)_i + N_m (\Delta u_s)_m + N_j (\Delta u_s)_j \\
 \Delta v_n &= N_i (\Delta v_n)_i + N_m (\Delta v_n)_m + N_j (\Delta v_n)_j
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde as funções de interpolação estão indicadas na Fig. 5.9.



$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad [5.5]$$

$$N_m = (1 - \xi^2) \quad [5.6]$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1 + \xi) - \frac{1}{2}(1 + \xi^2) \quad [5.7]$$

FIG. [5.9]

O campo de deformações (ítem 5.1, Fig. 5.5) é então dado por:

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta u_s}{h} \\ \frac{\Delta v_n}{h} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} N_i & 0 & N_m & 0 & N_j & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_m & 0 & N_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Delta u_s)_i \\ (\Delta v_n)_i \\ (\Delta u_s)_m \\ (\Delta v_n)_m \\ (\Delta u_s)_j \\ (\Delta v_n)_j \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Da substituição de (5.3) em (5.8) resulta a expressão final das deformações em função dos deslocamentos relativos

referidos ao sistema global:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} N_i & 0 & N_m & 0 & N_j & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_m & 0 & N_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Efetutando-se o produto matricial (5.9):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} a N_i & b N_i & a N_m & b N_m & a N_j & b N_j \\ -b N_i & a N_i & -b N_m & a N_m & -b N_j & a N_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

\underline{B}

$\underline{\Delta U}$

$$\epsilon_s = \frac{1}{h} \{ a N_i \Delta u_i + b N_i \Delta v_i + a N_m \Delta u_m + b N_m \Delta v_m + a N_j \Delta u_j + b N_j \Delta v_j \} \quad (5.11)$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{h} \{ -b N_i \Delta u_i + a N_i \Delta v_i - b N_m \Delta u_m + a N_m \Delta v_m - b N_j \Delta u_j + a N_j \Delta v_j \} \quad (5.12)$$

O vetor de deslocamentos relativos $\underline{\Delta U}$ em (5.10) é calculado através do seguinte produto matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ u_i \\ v_i \\ u_p \\ v_p \\ u_q \\ v_q \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

\underline{T}
 \underline{U}

Com (5.10) e (5.13) fica estabelecido o campo de deformações no instante t como função dos deslocamentos nodais:

$$\underline{t}_{\underline{\varepsilon}} = \underline{B}_{\underline{G}} \cdot \underline{t}_{\underline{U}}$$

onde $\underline{B}_{\underline{G}}$ é o resultado do produto matricial $\underline{B} \cdot \underline{T}$, apresentado em (5.14):

$$\underline{B}_{\underline{G}} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} aN_j & bN_j & aN_i & bN_i & -aN_i & -bN_i & -aN_j & -bN_j & aN_m & bN_m & -aN_m & -bN_m \\ -bN_j & aN_j & -bN_i & aN_i & bN_i & -aN_i & bN_j & -aN_j & -bN_m & aN_m & bN_m & -aN_m \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

$\underline{B}_{\underline{G}}$

Determinando-se o campo de deformações no domínio

do elemento, pode-se com a matriz constitutiva (apresentada em (5.1)) calcular as tensões com as quais são obtidas as forças nodais internas.

Pelo princípio dos trabalhos virtuais as forças nodais internas são fornecidas por:

$$\underline{t}_{Re} = \int_V \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma dV \quad (5.15)$$

Esta integral é resolvida numericamente por Gauss Legendre:

$$\begin{aligned} \int_V \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma dV &= \int_{-1}^1 \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma \cdot h \cdot thic \cdot \frac{L}{2} d\xi = \\ &= \frac{h \cdot thic \cdot L}{2} \int_{-1}^1 \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma d\xi \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\frac{h \cdot thic \cdot L}{2} \cdot \int_{-1}^1 \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma d\xi = \frac{h \cdot thic \cdot L}{2} \cdot \sum_i^{NI} \omega_i \cdot \underline{B}_G^T(\xi_i) \cdot \underline{t}_\sigma(\xi_i)$$

onde,

h - espessura do elemento de interface

$thic = 1$ - estado plano de deformação

$thic = t$ - dimensão do elemento na direção Z (estado plano de tensões) (Fig. 5.10)

ω_i - constante de integração de Gauss-Legendre

ξ_i - coordenada natural segundo a direção longitudinal

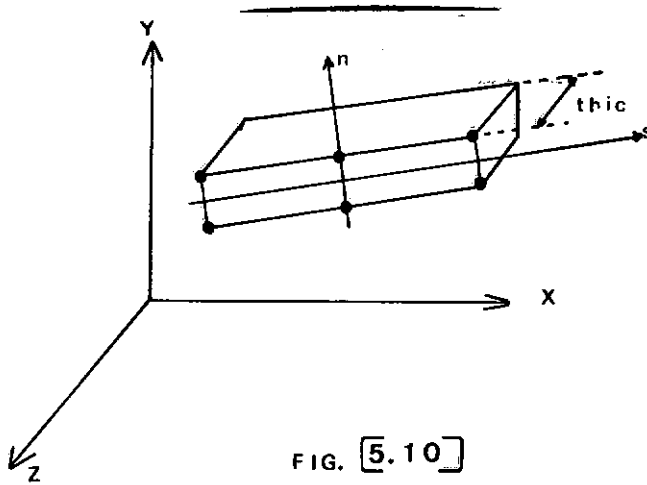


FIG. [5.10]

O desenvolvimento matemático do elemento linear da Fig. 5.11 é o caso particular do elemento quadrático, bastando para isto eliminar nos arranjos anteriores as parcelas associadas a função de interpolação N_m .

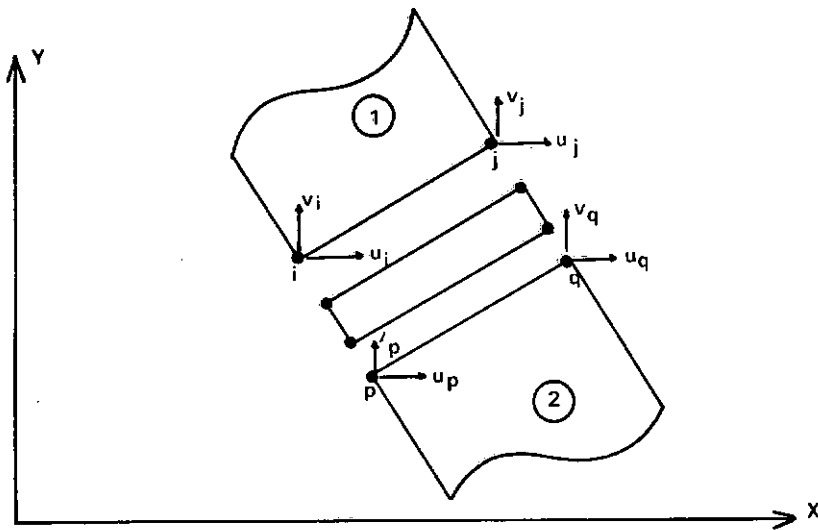


FIG. [5.11]

5.3 - MODELO MATEMÁTICO PARA SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS

O tratamento matemático utilizado em sólidos axissimétricos é idêntico ao anterior. Como diferença básica, tem-se o acréscimo da deformação circunferencial, calculada por:

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u}{R} \quad (5.17)$$

onde,

u = deslocamento radial de um ponto no domínio do elemento com raio R .

O campo de deformações é então definido por:

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_n \\ \epsilon_{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta u_s}{h} \\ \frac{\Delta v_n}{h} \\ \frac{u}{R} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Como em (5.4), Δu_s e Δv_n são interpolados dos respectivos valores nodais, ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta u_s &= N_i (\Delta u_s)_i + N_j (\Delta u_s)_j + N_m (\Delta u_s)_m \\ \Delta v_n &= N_i (\Delta v_n)_i + N_j (\Delta v_n)_j + N_m (\Delta v_n)_m \end{aligned} \quad (5.19)$$

O deslocamento radial u é dado por:

$$u = u_{base} + \frac{\Delta u}{2}$$

onde

u_{base} - é o deslocamento radial na base do elemento

$\frac{\Delta u}{2}$ - deslocamento relativo radial entre a superfície média do elemento e a base.

A continuidade do deslocamento radial no domínio do elemento é conseguida por interpolação dos deslocamentos radiais nodais, tomados em relação à superfície média.

$$u = (u_p + \frac{\Delta u_i}{2}) N_i + (u_n + \frac{\Delta u_m}{2}) N_m + (u_q + \frac{\Delta u_j}{2}) N_j \quad (5.20)$$

Com as equações (5.17, 5.18, 5.19 e 5.20) pode-se escrever a matriz \underline{B} para sólidos axissimétricos, do mesmo modo que (5.10):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_n \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{N_i a}{h} & \frac{N_i b}{h} & \frac{N_m a}{h} & \frac{N_m b}{h} & \frac{N_j a}{h} & \frac{N_j b}{h} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{N_i b}{h} & \frac{N_i a}{h} & -\frac{N_m b}{h} & \frac{N_m a}{h} & -\frac{N_j b}{h} & \frac{N_j a}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{2R} & 0 & \frac{N_m}{2R} & 0 & \frac{N_j}{2R} & 0 & \frac{N_i}{R} & \frac{N_m}{R} & \frac{N_j}{R} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ u_p \\ u_n \\ u_q \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

\underline{B}

Do produto matricial em (5.21), obtém-se as expressões finais das deformações como função dos deslocamentos relativos:

$$\epsilon_s = \frac{1}{h} \left[a N_i \Delta u_i + b N_i \Delta v_i + a N_m \Delta u_m + b N_m \Delta v_m + a N_j \Delta u_j + b N_j \Delta v_j \right] \quad (5.22)$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{h} \left[-b N_i \Delta u_i + a N_i \Delta v_i - b N_m \Delta u_m + a N_m \Delta v_m - b N_j \Delta u_j + a N_j \Delta v_j \right] \quad (5.23)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \left[\frac{N_i \Delta u_i}{2} + \frac{N_m \Delta u_m}{2} + \frac{N_j \Delta u_j}{2} + N_i u_p + N_m u_n + N_j u_q \right] \quad (5.24)$$

Como no ítem 5.2, pode-se escrever a matriz \underline{B}_G :

$$\underline{B}_G = \begin{Bmatrix} \frac{N_j a}{h} & \frac{N_j b}{h} & \frac{N_i a}{h} & \frac{N_j b}{h} & \frac{N_i a}{h} & \frac{N_i b}{h} & \frac{N_j a}{h} & \frac{N_j b}{h} & \frac{N_m a}{h} & \frac{N_m b}{h} & \frac{N_m a}{h} & \frac{N_m b}{h} \\ -\frac{N_j b}{h} & \frac{N_j a}{h} & -\frac{N_i b}{h} & \frac{N_i a}{h} & \frac{N_i b}{h} & -\frac{N_i a}{h} & \frac{N_j b}{h} & -\frac{N_j a}{h} & \frac{N_m b}{h} & \frac{N_m a}{h} & \frac{N_m b}{h} & -\frac{N_m a}{h} \\ \frac{N_j}{2R} & 0 & \frac{N_i}{2R} & 0 & \frac{N_i}{2R} & 0 & \frac{N_j}{2R} & 0 & \frac{N_m}{2R} & 0 & \frac{N_m}{2R} & 0 \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

O campo de deformações em um instante t , em função dos deslocamentos nodais, é então dado por:

$$\underline{t}_\epsilon = \underline{B}_G \cdot \underline{t}_U \quad (5.26)$$

As tensões correspondentes são então:

$$\underline{t}_\sigma = \underline{D} \cdot \underline{t}_\epsilon$$

onde

$$\underline{D} = \begin{Bmatrix} C_s & 0 & 0 \\ 0 & C_n & 0 \\ 0 & 0 & C_\theta \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

onde:

C_θ - coeficiente de rigidez circunferencial

Uma vez calculada \underline{B}_G (5.25) e conhecido o estado de tensões no instante t (5.27), pode-se definir o vetor de forças nodais internas:

$$\begin{aligned} \underline{t}_{R_{re}} &= \int_V \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma \, dV = \int_{-1}^1 \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma \cdot \frac{L}{2} \cdot R \cdot h \cdot d\xi = \\ &= \frac{h \cdot L}{2} \int_{-1}^1 \underline{B}_G^T \cdot \underline{t}_\sigma \cdot R \cdot d\xi = \\ &= \frac{h \cdot L}{2} \sum_i w_i \underline{B}_G^T(\xi_i) \cdot \underline{t}_\sigma(\xi_i) \cdot R(\xi_i) \end{aligned}$$

onde:

R - raio do ponto de integração na superfície média

ξ_i - coordenada natural segundo a direção longitudinal

w_i - constante de integração de Gauss-Legendre

Como no ítem 5.2, o elemento linear é o caso particular do elemento quadrático, cuja formulação é conseguida pela eliminação nos arranjos anteriores dos termos associados à N_m .

VI - MODELO DE FLUIDO

O comportamento hidrodinâmico de fluidos é estudado por um modelo simplificado ref. [2.11], no qual o fluido é considerado como um sólido elástico com resistência nula ao cisalhamento. O meio fluido é discretizado por elementos finitos isoparamétricos, com lei constitutiva apropriada.

6.1 - LEI CONSTITUTIVA

Para um material elástico isotrópico a matriz de coeficientes elásticos pode ser escrita por:

$$\underline{\underline{D}} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} K + \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} G \quad (6.1)$$

$\underline{\underline{D}}$ $\underline{\underline{D}}$

onde:

K - constante de deformação volumétrica (ref. [2.20])

G - constante de deformação cisalhante

Para o fluido idealizado é necessário inserir na matriz $\underline{\underline{D}}$ em (6.1) uma constante K apropriada e $G = 0$ (o que pressupõe ausência de viscosidade), resultando em:

$$\bar{D} = K \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

A matriz \bar{D} , quando particularizada aos sólidos axissimétricos e estruturas caracterizadas por estado plano de deformações, é dada por:

Estado Plano de Deformações

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Sólidos Axissimétricos

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

De posse das matrizes de coeficientes elásticos (6.3) e (6.4), as forças nodais internas são obtidas da maneira usual, como apresentado no Capítulo II.

6.2 - AMORTECIMENTO

As forças dissipativas de amortecimento geradas no

movimento vibratório em meio fluido, são devidos à viscosidade. Estas forças resultam em um sistema adicional de tensões, as quais são funções das velocidades de deformação, (ref. [2.11]) e são dadas por:

$$\underline{t}_{\sigma'} = \mu \cdot \underline{\bar{D}} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\dot{t}}_{\underline{U}} \quad (6.5)$$

onde μ é a viscosidade do fluido.

Com a equação (6.5) as forças viscosas são fornecidas por:

$$\int_{Vol} \underline{B}^T \cdot \underline{t}_{\sigma'} \, dv = \underline{C}_{\mu} \cdot \underline{\dot{t}}_{\underline{U}} \quad (6.6)$$

onde

$$\underline{C}_{\mu} = \int_{Vol} \underline{B}^T \mu \cdot \underline{\bar{D}} \cdot \underline{B} \, dv \quad (6.7)$$

Substituindo-se $\underline{\dot{t}}_{\underline{U}}$ por:

$$\underline{\dot{t}}_{\underline{U}} = \frac{(\underline{t}_{\underline{U}} - \underline{t}^{-\Delta t} \underline{t}_{\underline{U}})}{\Delta t} \quad (\text{ref. [2.11]}) \quad (6.8)$$

obtêm-se as forças dissipativas:

$$\underline{C}_{\mu} \cdot \frac{1}{\Delta t} (\underline{t}_{\underline{U}} - \underline{t}^{-\Delta t} \underline{t}_{\underline{U}}) \rightarrow \quad (6.9)$$

$$\underline{t}_{\underline{H}_{\mu}} = \underline{C}_{\mu} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \underline{t}_{\underline{U}}$$

$$\underline{t}^{-\Delta t} \underline{H}_{\mu} = -\underline{C}_{\mu} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \underline{t}^{-\Delta t} \underline{t}_{\underline{U}}$$

Estes vetores podem então ser incluídos no algoritmo apresentado no Capítulo II. O amortecimento do fluido, no presente estudo, não foi implementado e será motivo de desenvolvimento futuro.

6.3 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Este modelo simplificado tem fornecido resultados satisfatórios no que diz respeito à propagação de ondas elásticas em fluidos confinados e quando utilizado em problemas de interação sólido-fluido, ref. [2.11]. Neste último caso, condições de contorno compatíveis com a interface existente devem ser fornecidas. Modelos mais sofisticados quanto ao tratamento teórico e análise do comportamento interativo sólido-fluido têm sido estudados, como por exemplo nas referências [6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.7, 6.8 e 6.9].

VII - RESULTADOS

7.1 - VIGA BI-APOIADA

Neste exemplo analisa-se a resposta dinâmica de uma viga bi-apoiada submetida a um carregamento distribuído correspondente a 75% do valor estático de colapso. Na Fig. 7.1 estão apresentadas as dimensões geométricas e propriedades físicas da viga, bem como o modelo discreto utilizado. O material da viga segue o critério de escoamento de von Mises e comportamento plástico perfeito. A discretização valeu-se de seis elementos isoparamétricos com oito pontos nodais e integrados por Gauss (2 x 2).

O propósito desta análise é comparar as soluções elástica e elasto-plástica obtidas pelo presente estudo (Fig. 7.2) com as soluções fornecidas pelo método de Newmark (NONSAP, ref. [7.6]).

A boa concordância entre as soluções elásticas serve como apreciação do desempenho do algoritmo de diferença central e da matriz de massa agrupada. A precisão conseguida na solução elasto-plástica prova de modo evidente a eficácia do intervalo crítico utilizado na integração no tempo em correspondência com as explicações relacionadas à instabilidade do referido algoritmo nas integrações em meios elasto-plásticos.

7.2 - CHICOTEAMENTO DE TUBULAÇÕES (Pipe Whip Problem)

Em reatores nucleares as tubulações que funcionam sob altas pressões ao se romperem sofrem chicoteamento, o que compromete a segurança dos mesmos. A proteção a este efeito pode ser conseguida pela instalação de um suporte capaz de absorver

a energia cinética da tubulação, reduzindo assim as amplitudes de oscilação. É conveniente salientar que entre a tubulação e o suporte é deixado um espaço de modo a admitir movimentos térmicos e os deslocamentos associados com a operação normal de funcionamento, ref. [7.3].

O presente estudo tem por finalidade analisar a resposta dinâmica do sistema (tubulação + suporte), simulando-o por uma viga e uma treliça respectivamente (Figs. 7.3 e 7.4). O material da treliça é considerado plástico-perfeito com lei constitutiva apropriada, de modo a incluir os efeitos do espaço existente entre o suporte e a tubulação (Fig. 7.4). O material da viga é também considerado plástico-perfeito, porém obedecendo ao critério de escoamento de von Mises (Fig. 7.3). A viga é discretizada por seis elementos isoparamétricos com oito pontos nodais com integração (2 x 2) (Fig. 7.4).

O propósito desta análise é comparar as soluções elasto-plásticas obtidas pelo presente estudo com as fornecidas na ref. [7.3], acrescentando-se porém, alguns resultados esclarecedores do comportamento não-linear do material do suporte.

Na Fig. 7.5 tem-se três soluções elasto-plásticas que objetivam mostrar a influência do espaço existente entre a tubulação e o suporte (folga). Observa-se que o aumento da folga conduz a um desenvolvimento de maior energia cinética, e por conseguinte, maior deformação no suporte. Na Fig. 7.6 estuda-se a influência da tensão de escoamento do material do suporte, utilizando-se o esquema estrutural com folga de 3". Verifica-se que o aumento da tensão de escoamento reduz significativamente o deslocamento máximo, absorvendo portanto mais rapidamente a energia cinética gerada.

Aproveitando-se da solução elasto-plástica com folga de 3", apresenta-se nas Figs. 7.7, 7.9 e 7.11, as deformadas da viga em três instantes diferentes, ilustrando-se também as regiões plastificadas associadas a cada uma das deformadas. Nas Figs. 7.8, 7.10 e 7.12, estão indicadas as velocidades verticais dos graus de liberdade ao longo da superfície média, mostrando a tendência de vibração da viga.

Observando-se as Figs. 7.5 e 7.6, constata-se que após o deslocamento vertical máximo ter ocorrido, o extremo da viga passa a oscilar com pequenas amplitudes, mantendo aproximadamente a mesma posição final. Este comportamento é consequência de se considerar ou não o descarregamento elástico do material do suporte após sua plastificação. Este efeito físico é mais evidente nos resultados das Figs. 7.13 e 7.14. Na Fig. 7.13 analisa-se o esquema estrutural com folga de 3", supondo que somente a treliça se plastifica. Dois modelos são estudados:

"A" com descarregamento elástico

"B" sem descarregamento.

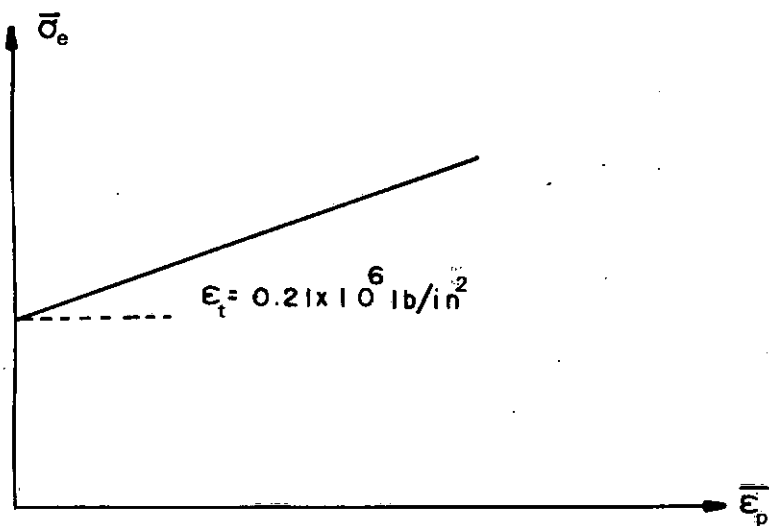
Observa-se que na fase de restauração do extremo da viga à sua posição de origem (o que implica em descarregamento elástico do material do suporte), há uma diferença sensível nas respostas. Resultados semelhantes são também apresentados na Fig. 7.14 porém utilizando-se uma folga de 0.5", sendo a viga e a treliça analisadas em regime plástico.

O instante $t = 0.00625s$ corresponde aproximadamente à condição mais crítica da viga em regime plástico. É interessante portanto, que nesse instante se estude a influência da plasticidade do material da viga na distribuição de esforços

internos. Isto pode ser feito comparando-se o diagrama de momento fletor obtido em análise elástica e elasto-plástica da viga como mostrado na Fig. 7.15.

7.3 - CALOTA ESFÉRICA DELGADA

A calota esférica delgada, com propriedades físicas e dimensões geométricas apresentadas na Fig. 7.16, é submetida a um carregamento distribuído súbito e constante. A plasticidade do material da casca obedece ao critério de escoamento de von Mises com lei de endurecimento isotrópica segundo o modelo bilinear:



As soluções elástica e elasto-plástica são calculadas pelo presente estudo e comparadas com as soluções fornecidas na ref. [7.6], onde a integração no tempo foi realizada pelo algoritmo de Newmark (Fig. 7.16).

Analizando-se o resultado da Fig. 7.16, constata-se a boa concordância entre as soluções elástica e elasto-plástica resolvidas por ambos algoritmos. Pode-se de imediato, somen-

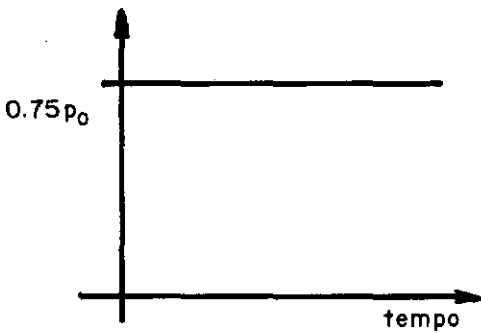
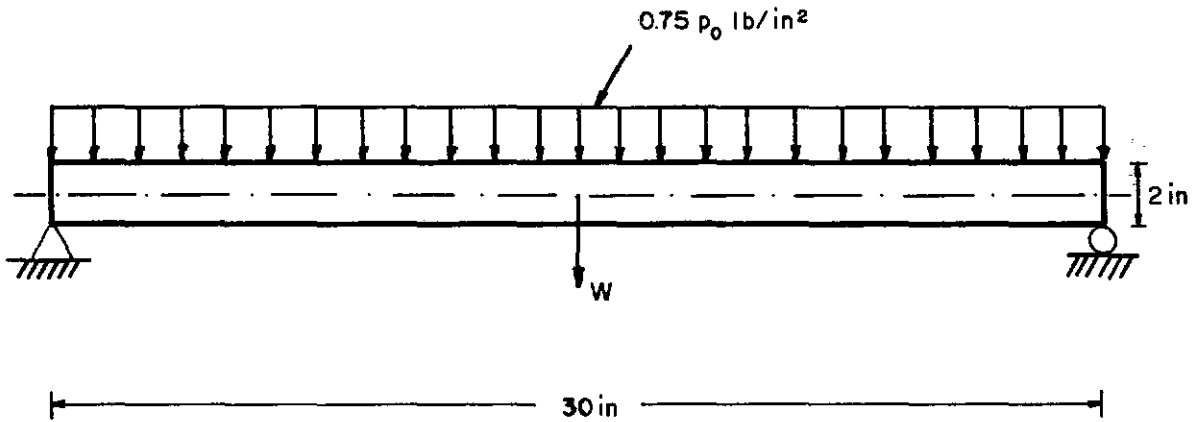
te a partir da solução elástica, comprovar o desempenho satisfatório da matriz de massa agrupada em substituição à matriz de massa consistente. Com o intervalo de integração utilizado, consegue-se pelo algoritmo de diferença central, a mesma precisão na solução elasto-plástica que o fornecido na ref. [7.6].

7.4 - CALOTA ESFÉRICA ESPESSA

Neste exemplo analisa-se a resposta dinâmica de uma calota esférica com 3in de espessura quando submetida a um carregamento distribuído de 15.000 PSI aplicado em 0.1×10^{-4} s, (Fig. 7.17). O material da casca segue o critério de escoamento de von Mises com lei de endurecimento isotrópica segundo o modelo bi-linear. Na ref. [7.1] a estrutura foi discretizada por dez elementos isoparamétricos de sólido de revolução com variação cúbica de deslocamentos nos bordos e a integração no tempo foi realizada pelo algoritmo de Newmark. Na solução elástica os elementos foram integrados por Gauss (2 x 2) e na solução elasto-plástica foram integrados por Gauss na direção circunferencial e por Simpson na direção radial, de modo a considerar a plasticidade dos pontos de integração dos bordos interior e exterior da calota.

No presente estudo utilizou-se de dez elementos isoparamétricos de sólido de revolução com oito pontos nodais e integração (2 x 2) e (3 x 3).

A solução elástica que utiliza regra de integração (2 x 2) concorda satisfatoriamente com a fornecida pela ref. [7.1], porém a solução elasto-plástica é afetada pelo esquema de integração empregado. A solução com (2 x 2) apresenta algum desvio da solução fornecida pela ref. [7.1], porém com (3 x 3), obtém-se praticamente os mesmos resultados.



ESPESSURA DA VIGA = 1 in

$E = 3 \times 10^4 \text{ kip/in}^2$

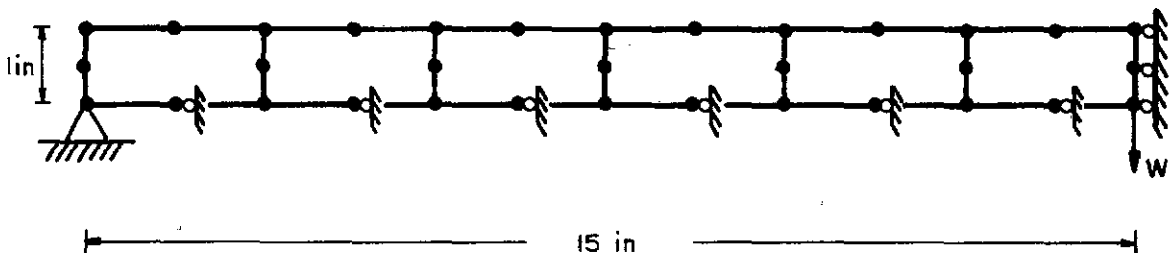
$V = 0.3$

$\sigma_y = 50 \text{ kip/in}^2$

$\rho = 0.733 \times 10^{-3} \text{ lb sec}^2/\text{in}^4$

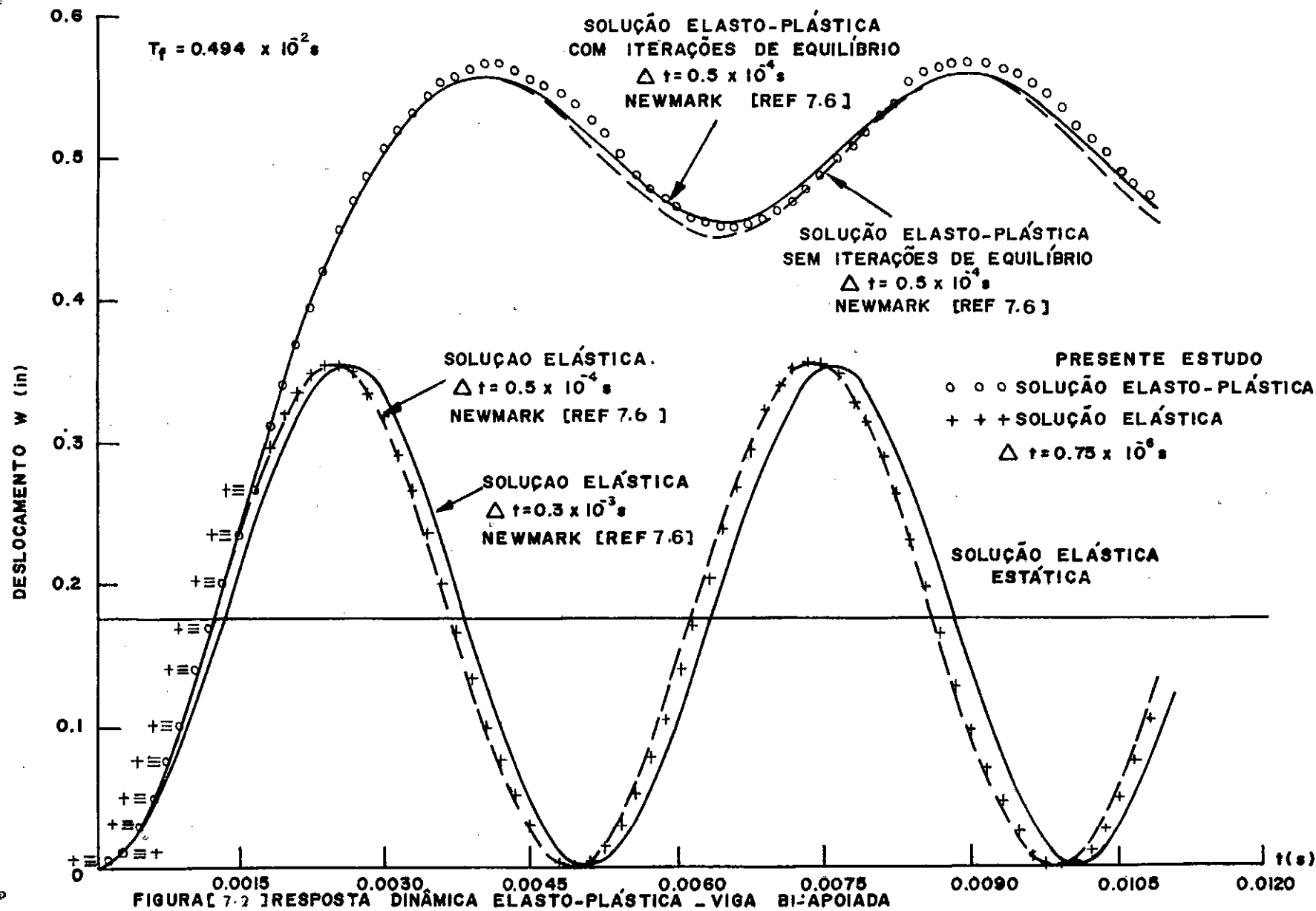
$P_0 = \text{CARGA ESTÁTICA DE COLAPSO}$

$$P_0 = \frac{2 \sigma_y h^2}{l^2}$$



ESTRUTURA ANALISADA

FIGURA 7.13 RESPOSTA DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA - VIGA BI-APOIADA



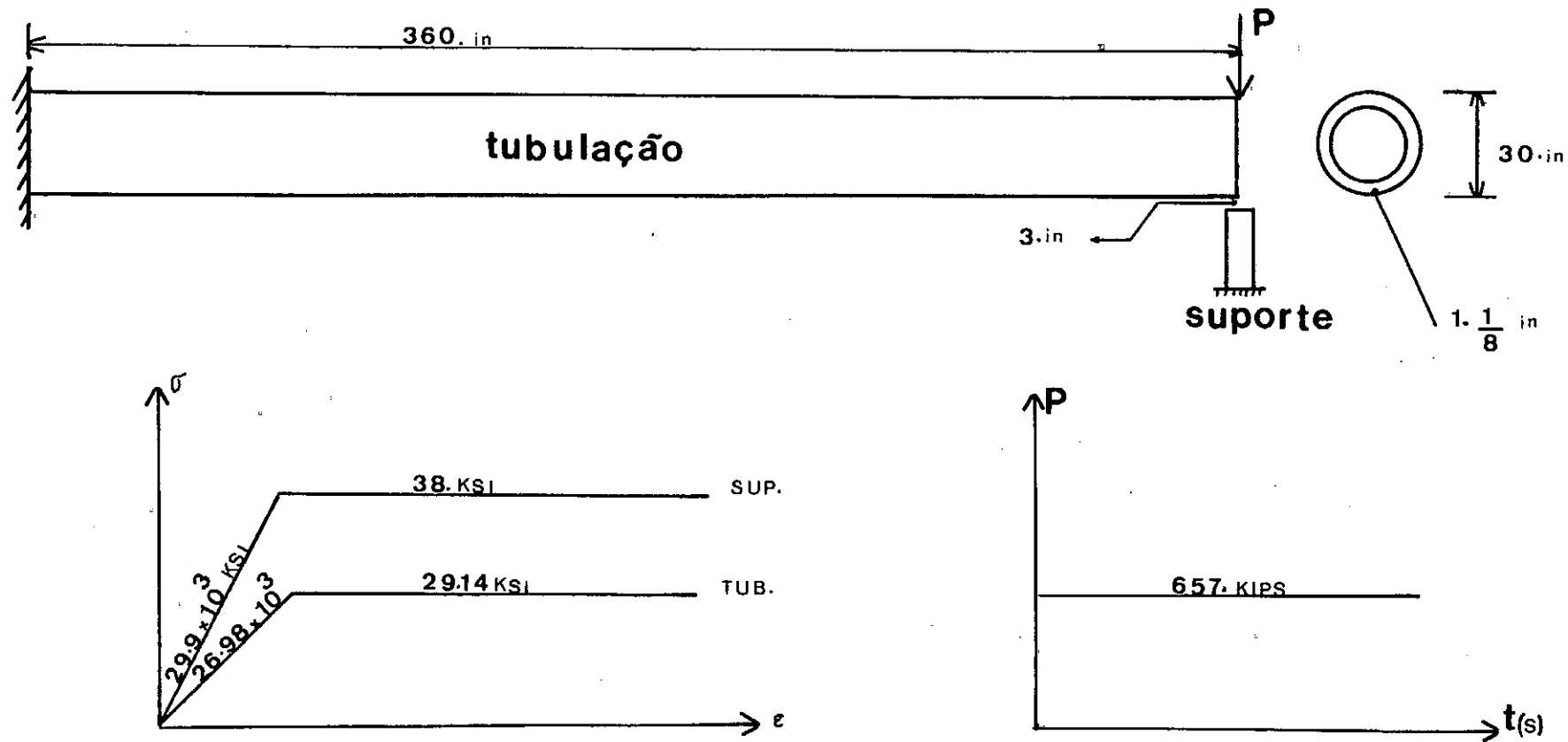


FIG. [7.3] MODELO ORIGINAL(sup. + tub.)

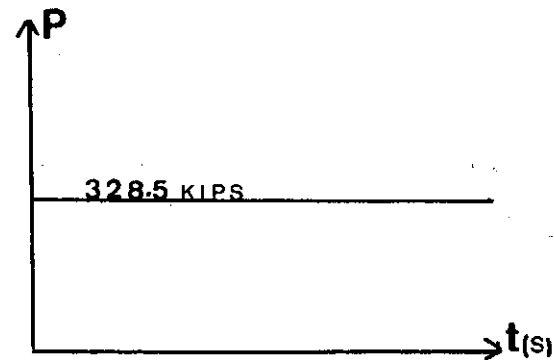
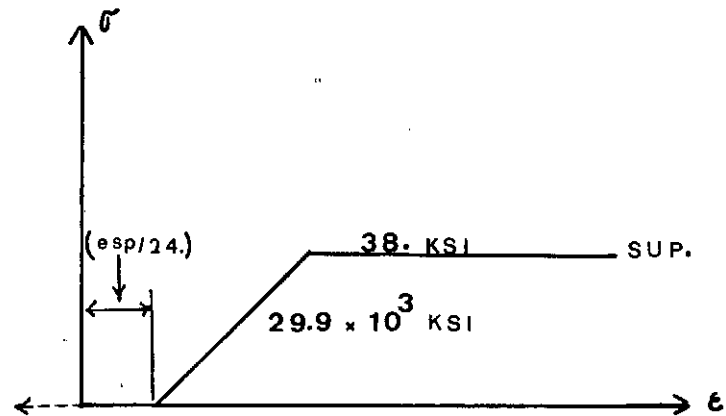
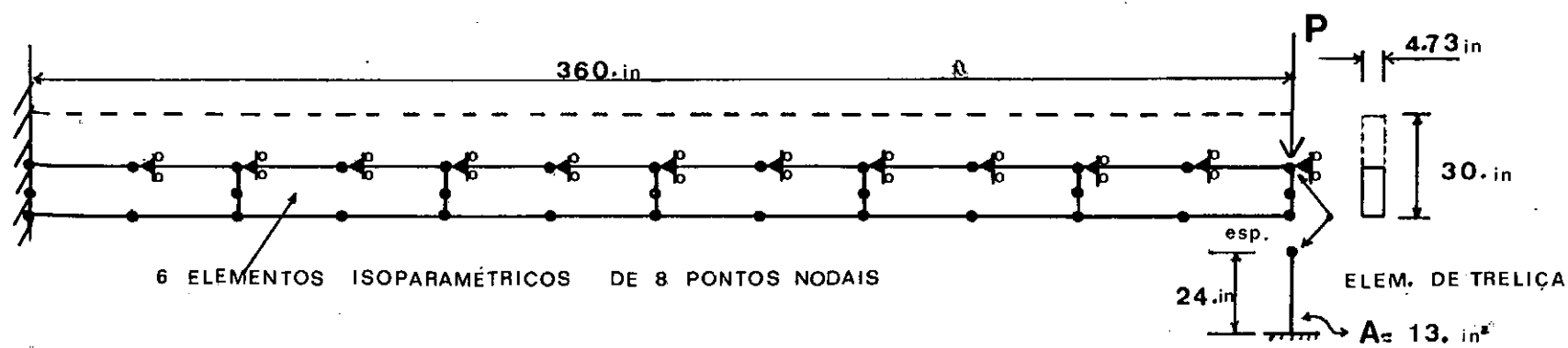


FIG [7.4] MODELO IDEALIZADO

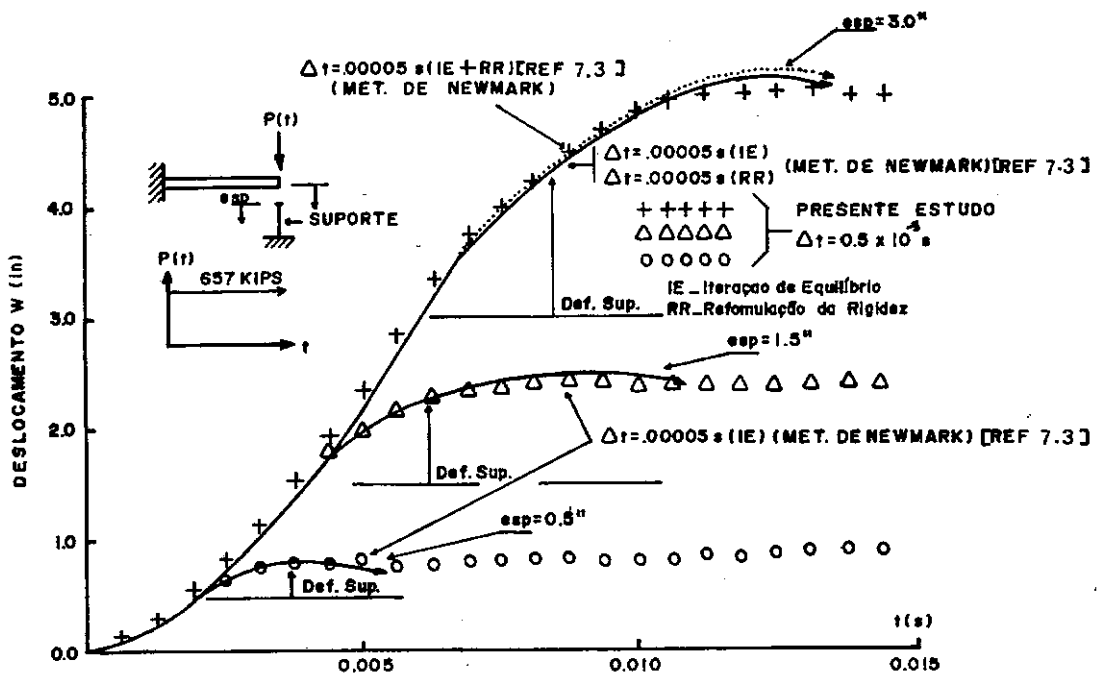


FIG 7.5]RESPOSTA DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA, EFEITO DO ESPAÇO EXISTENTE ENTRE A VIGA E O SUPORTE.

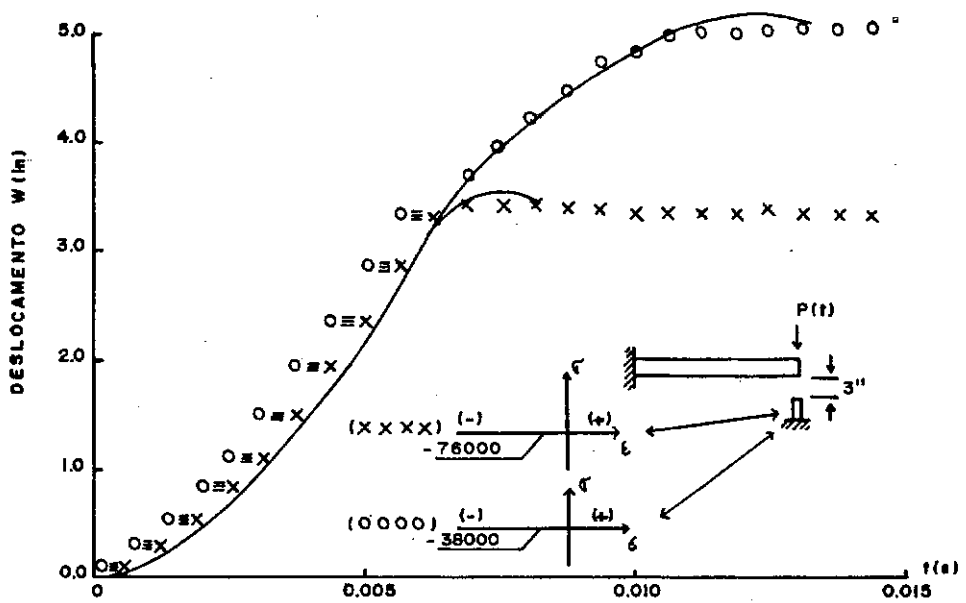


FIG 7.6 EFEITO DA TENSÃO DE ESCOAMENTO DO SUPORTE

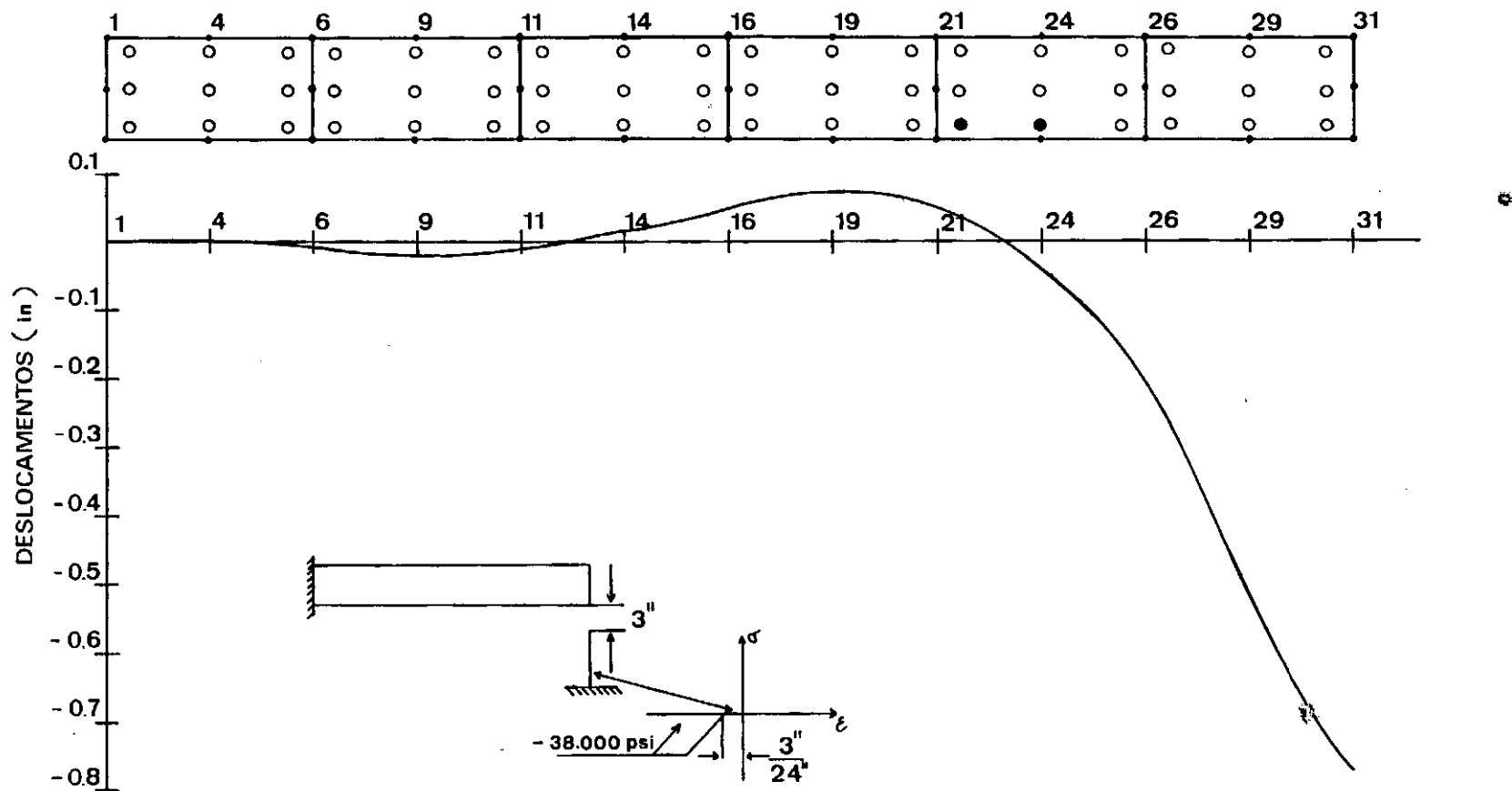


FIGURA [7.7] DEFORMADA E PONTOS DE INTEGRAÇÃO PLASTIFICADOS PARA $t = 0.0025s$

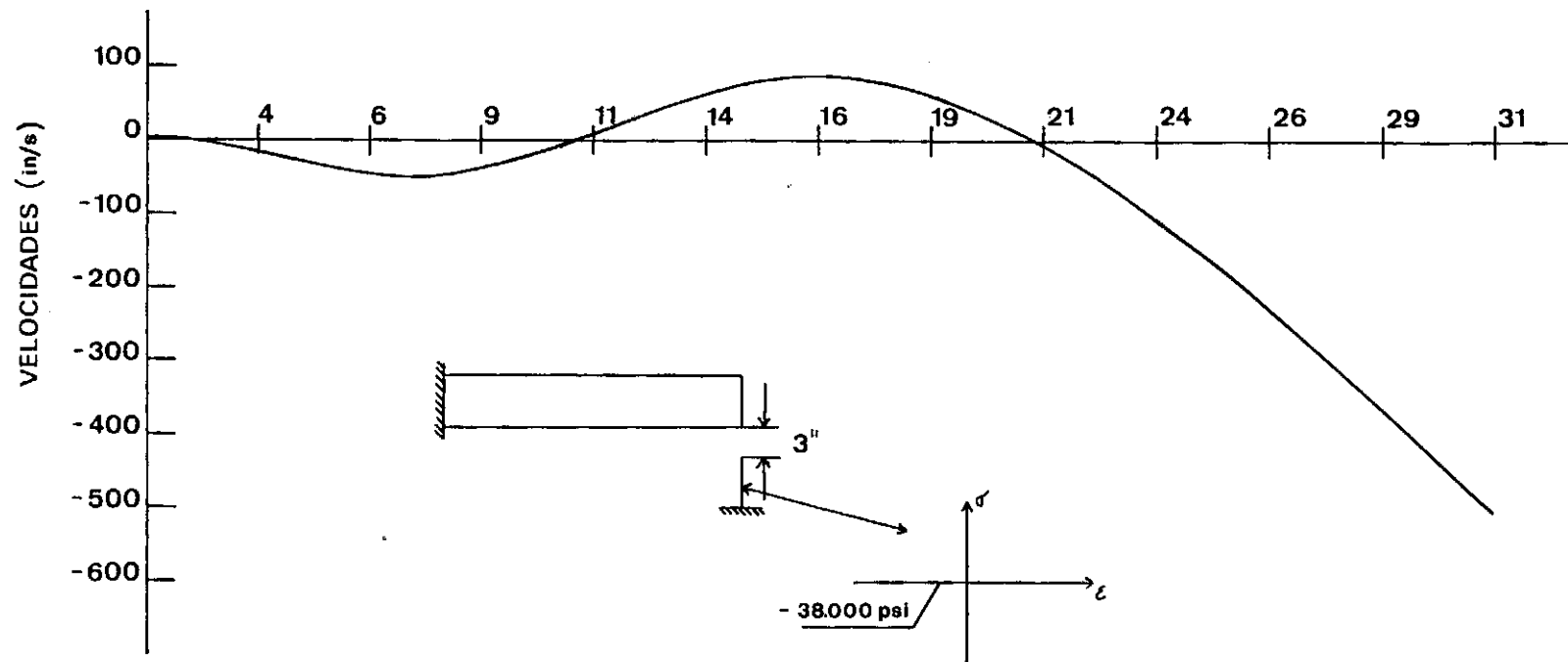


FIGURA [7.8] VELOCIDADES PARA $t = 0.002495$ s

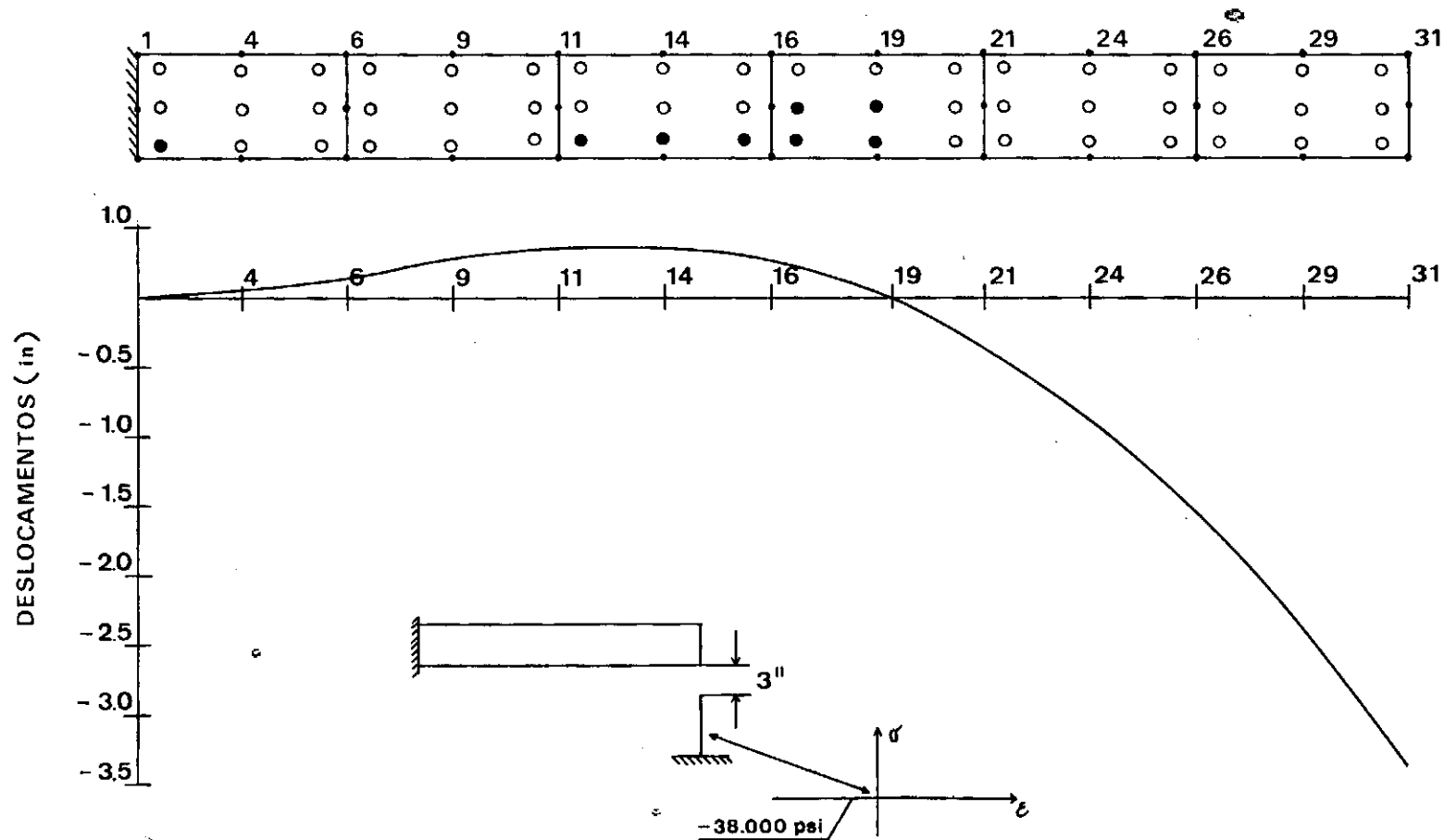


FIGURA [7.9] DEFORMADA E PONTOS DE INTEGRAÇÃO PLASTIFICADOS PARA $t = 0.00625s$

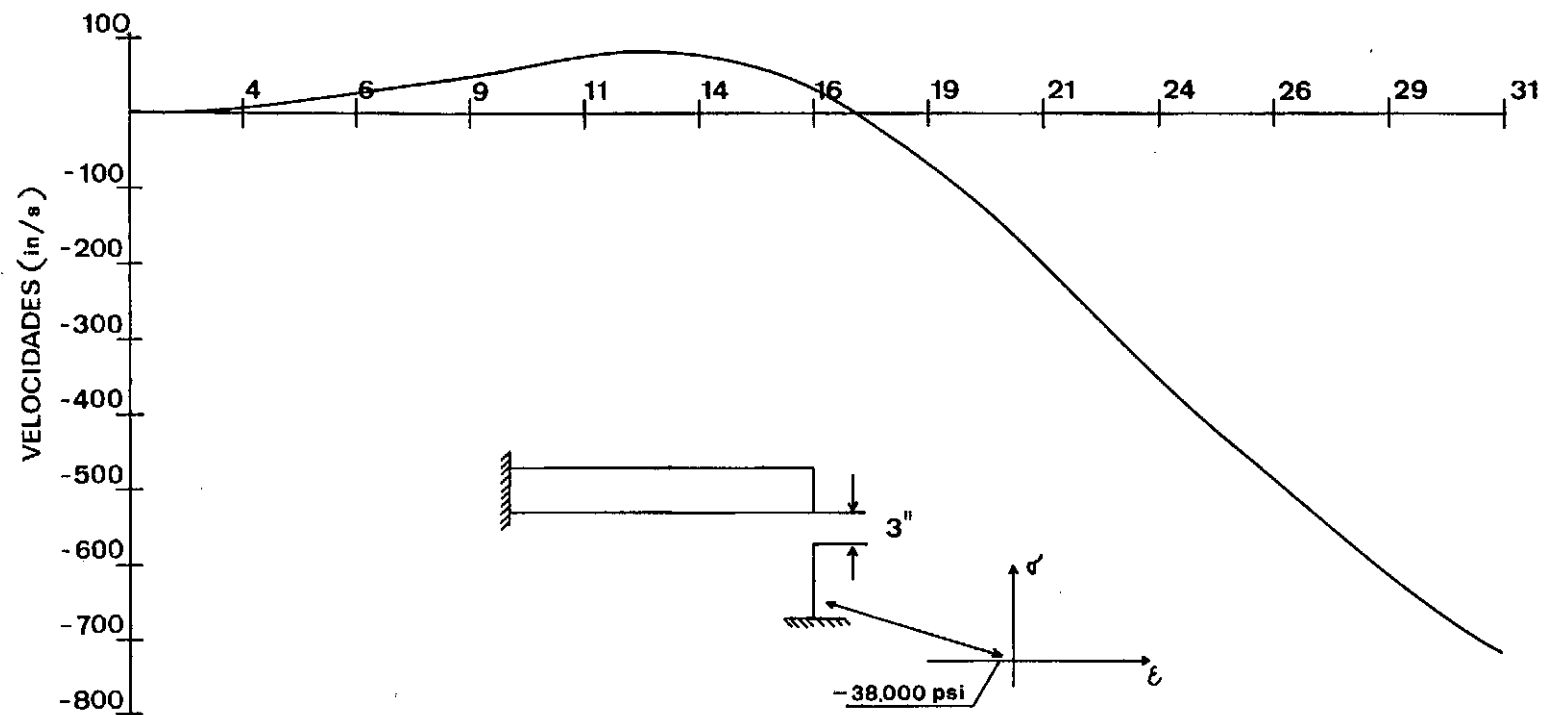
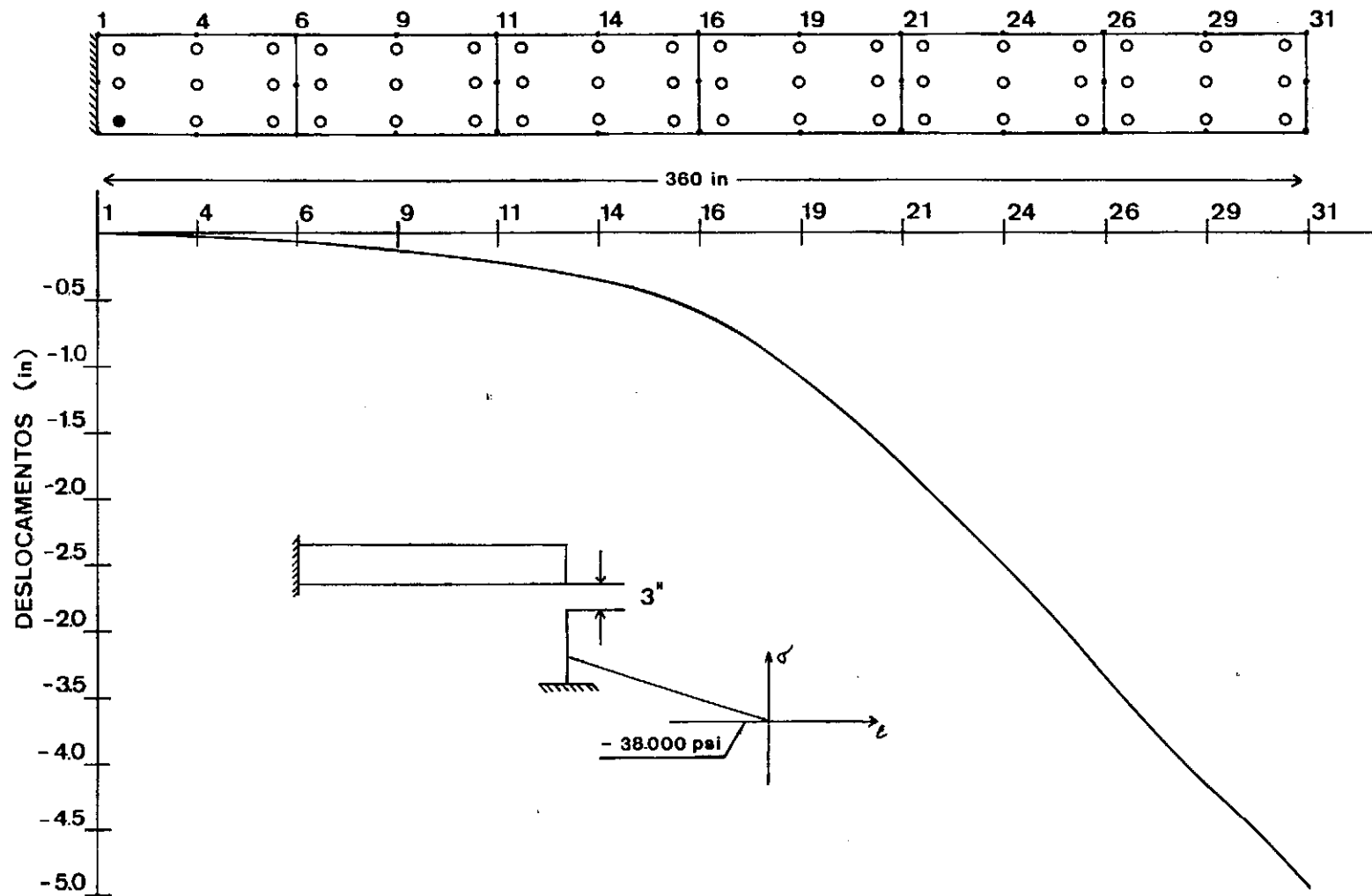


FIGURA [7.10] VELOCIDADES PARA $t = 0.006245$ s



FIGURA[7.11] DEFORMADA E PONTOS DE INTEGRAÇÃO PLASTIFICADOS PARA $t = 0.011875s$

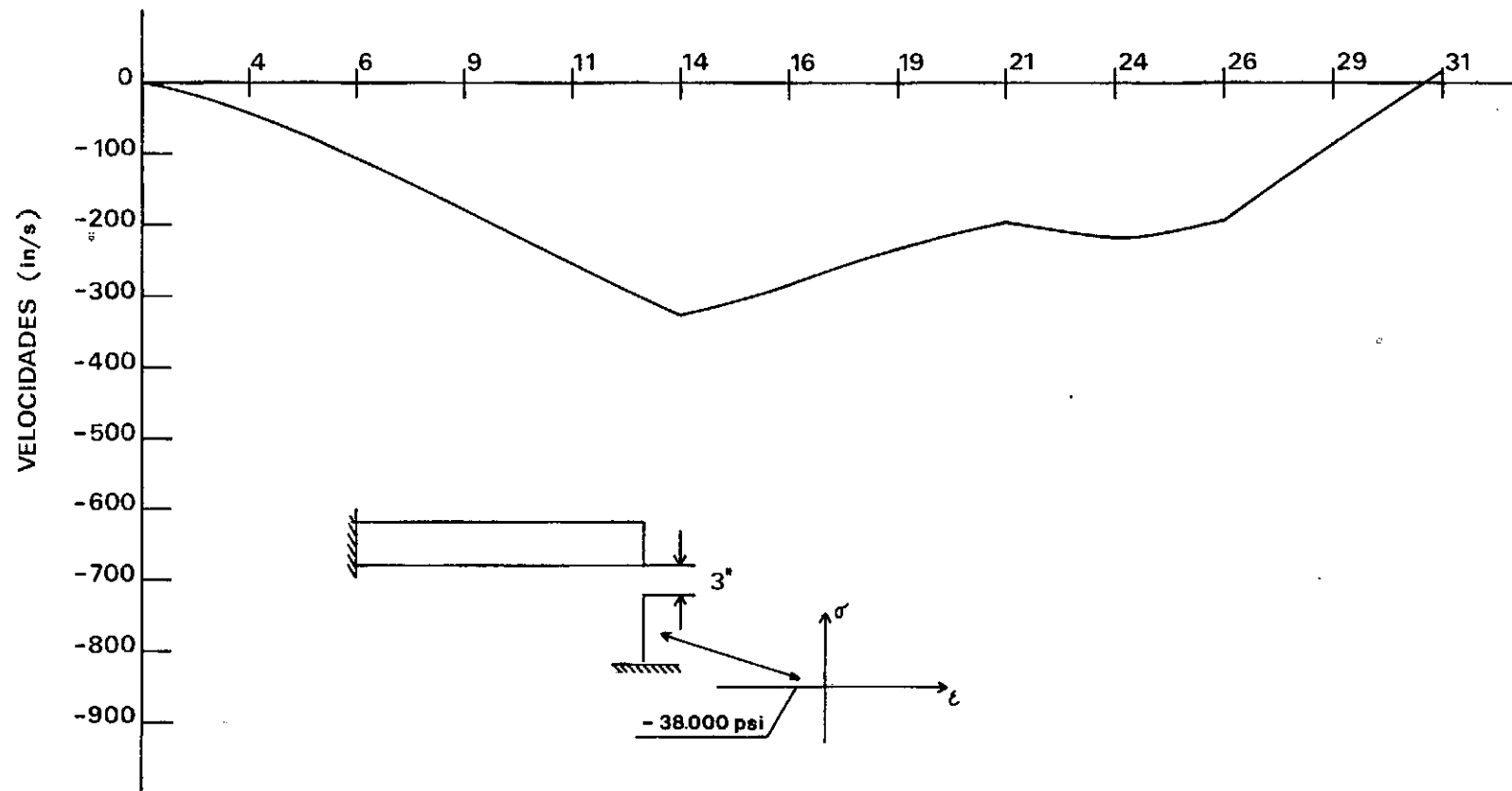
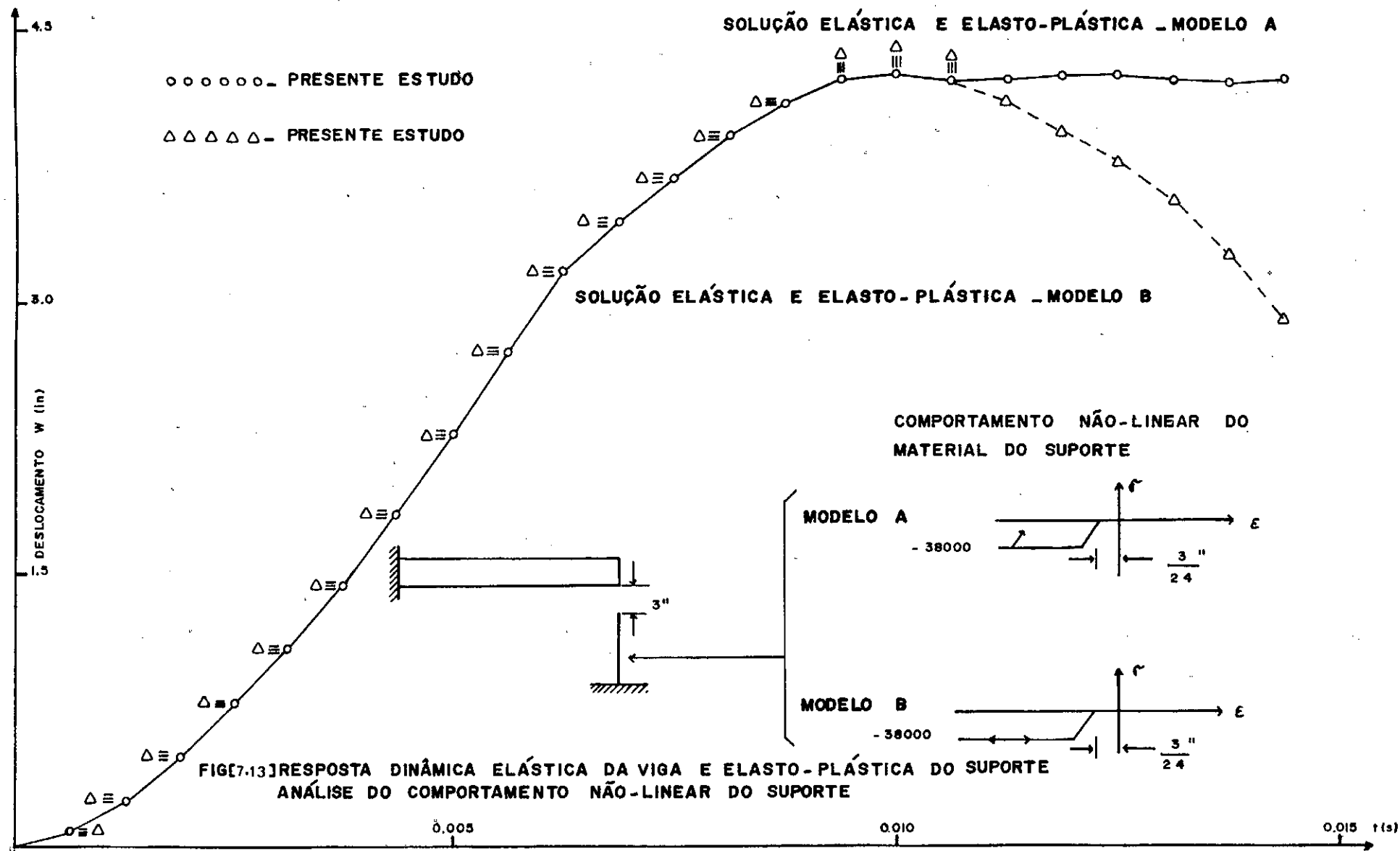
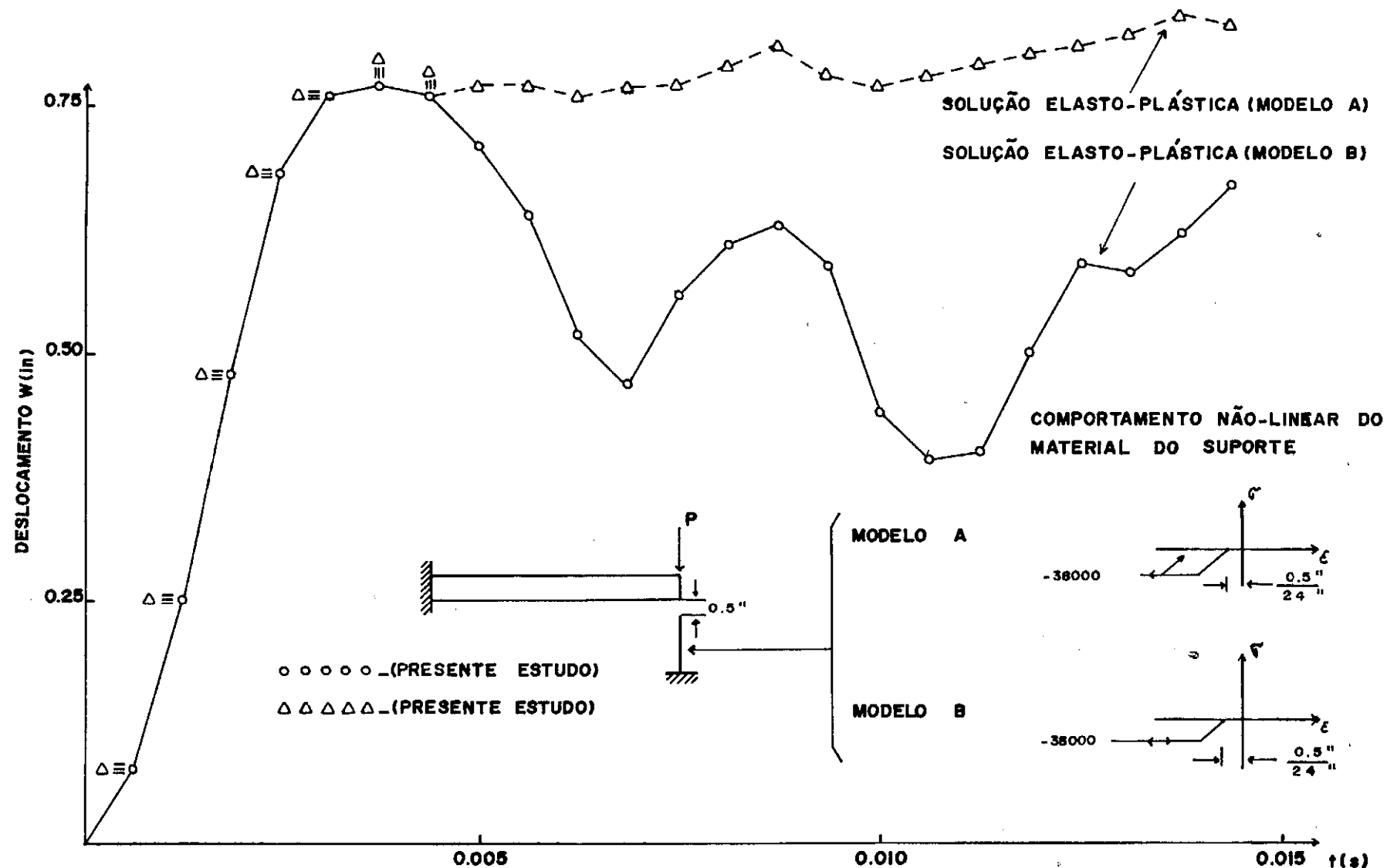
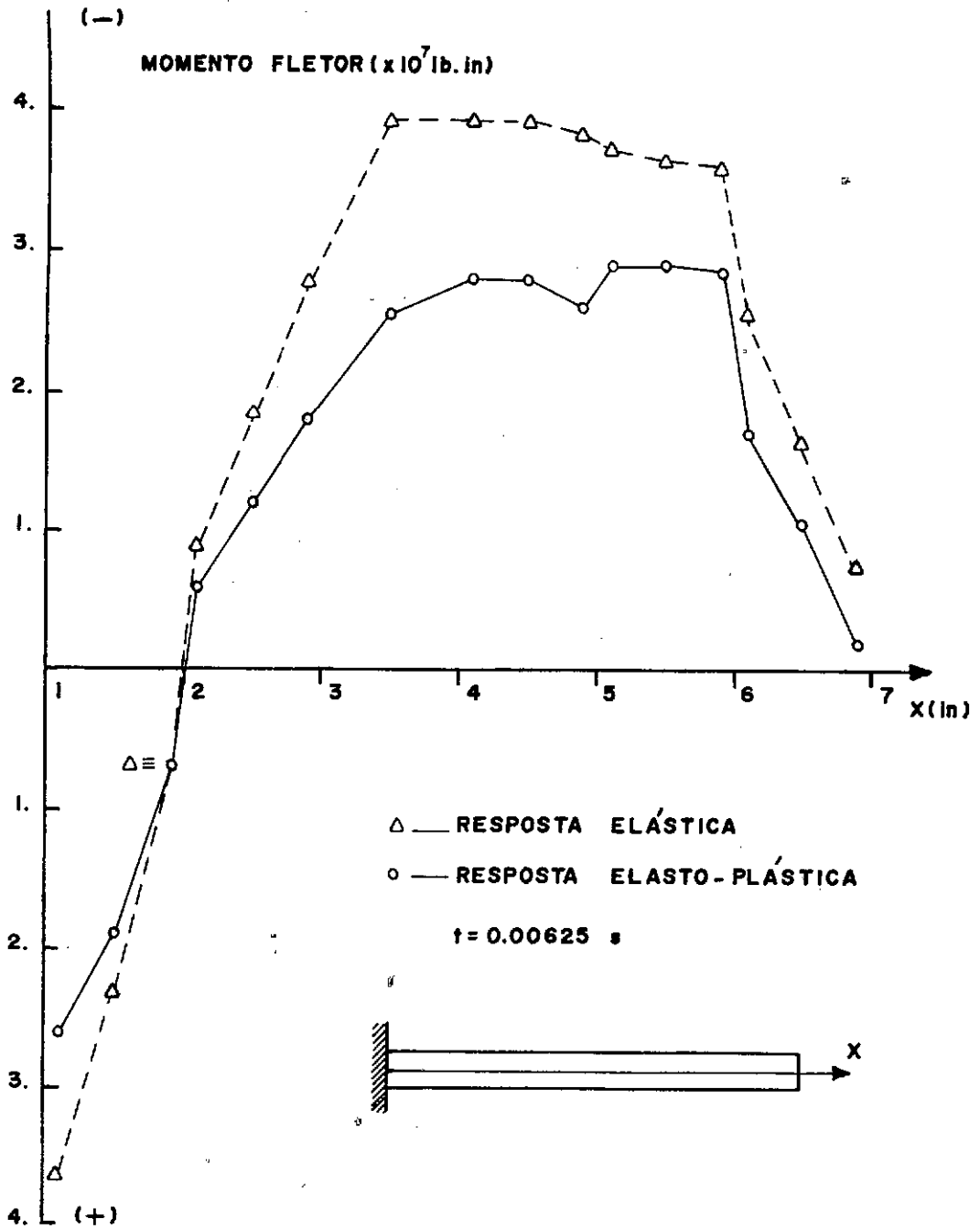


FIGURA [7.12] VELOCIDADES PARA $t = 0.011870$

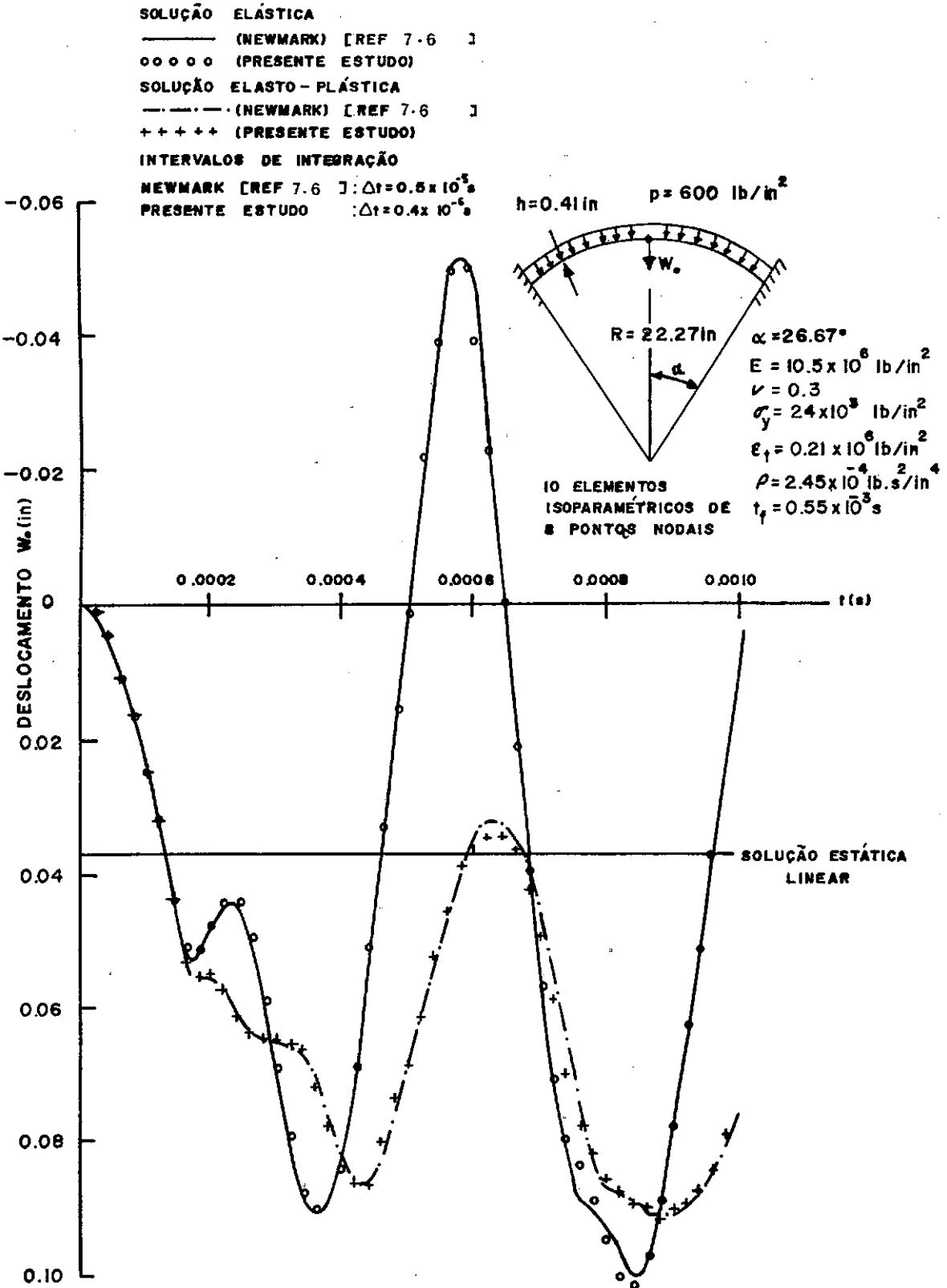




FIG[7.14] RESPOSTA DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA, ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO SUPORTE



FIG[7.15] MOMENTO FLETOR - RESPOSTA ELÁSTICA / ELASTO-PLÁSTICA



FIG[7.16] RESPOSTA DINAMICA ELASTO-PLASTICA - CASCA DELGADA

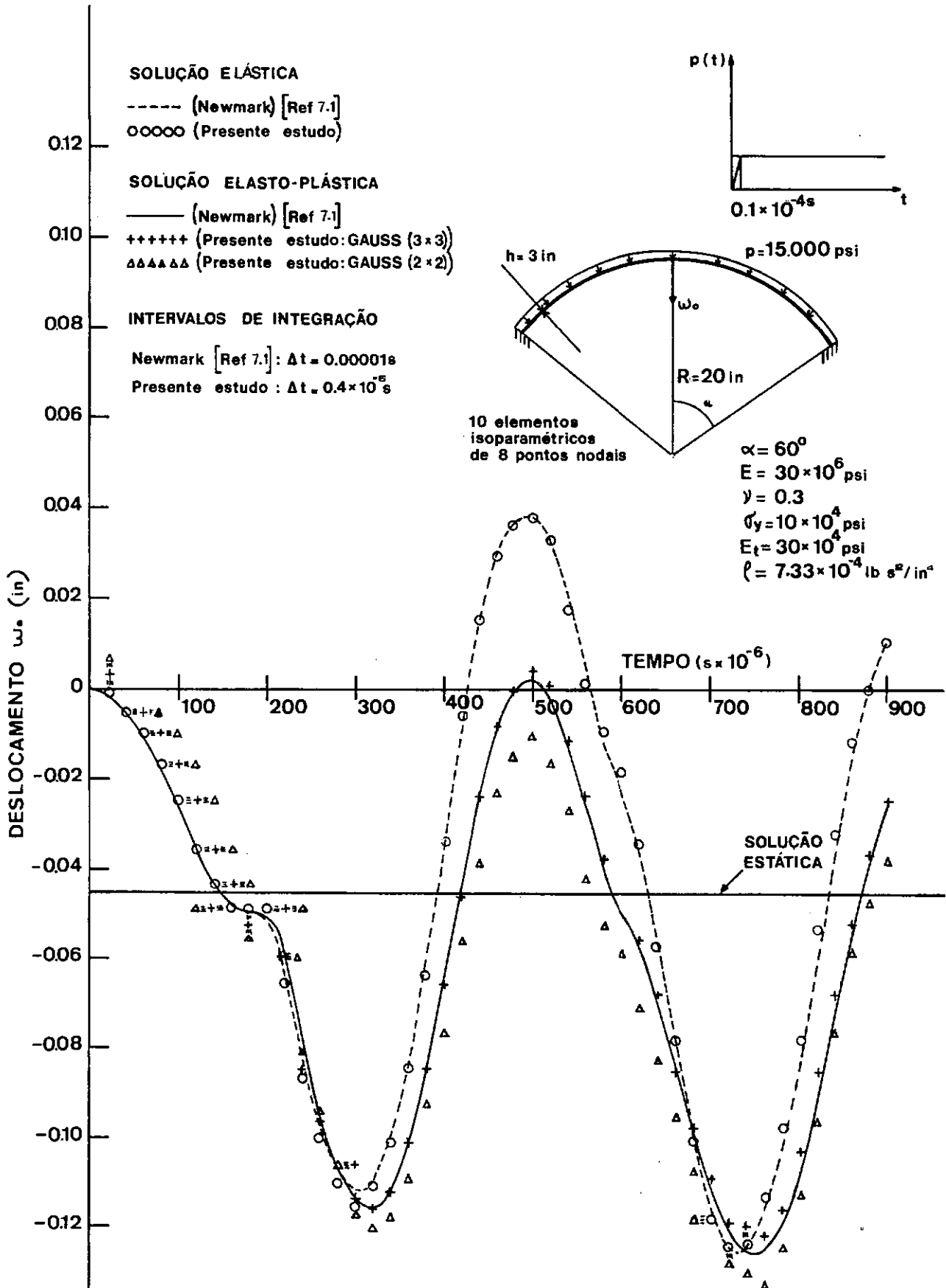


FIGURA [7.17] RESPOSTA DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA (CASCA ESPESSE)

7.5 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO

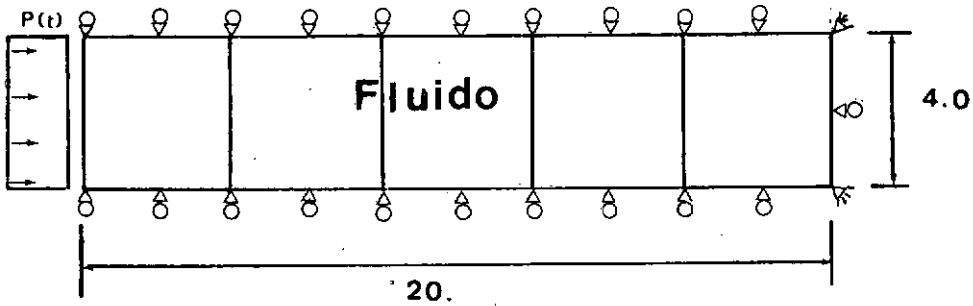
O propósito deste exemplo é mostrar o desempenho do modelo de fluido discutido no Capítulo VI. A Fig. 7.18 mostra um meio fluido confinado lateralmente e em um de seus extremos submetido a uma carga súbita e constante na extremidade oposta. Como modelo físico é considerado o estado plano de deformações para o qual uma solução teórica é disponível, ref. [2.11]. O meio fluido é discretizado pelos elementos de fluido dotados de lei constitutiva particularizada à deformações volumétricas (Capítulo VI).

A solução pelo Método dos Elementos Finitos através do algoritmo de diferença central reproduz a propagação das ondas de compressão em razoável correspondência com a solução teórica. Observa-se também que a reflexão das ondas na extremidade fixa é simulada.

Na Fig. 7.19a são fornecidos os resultados obtidos quando o processo de discretização utiliza elementos lineares e quadráticos, com integração (1×1) e (2×2) respectivamente.

Na Fig. 7.19b são fornecidos os mesmos resultados porém correspondentes à discretização por elementos quadráticos com integração (3×3) .

Resultados semelhantes são fornecidos na ref. [2.11], calculados com o mesmo algoritmo utilizado no presente estudo, porém considerando a influência da não-linearidade geométrica. Observa-se que tal efeito não exerce influência significativa nas respostas.



PROPRIEDADES DO FLUIDO

$$K = 120000 \text{ lb/in}^2$$

$$\nu = 0.5$$

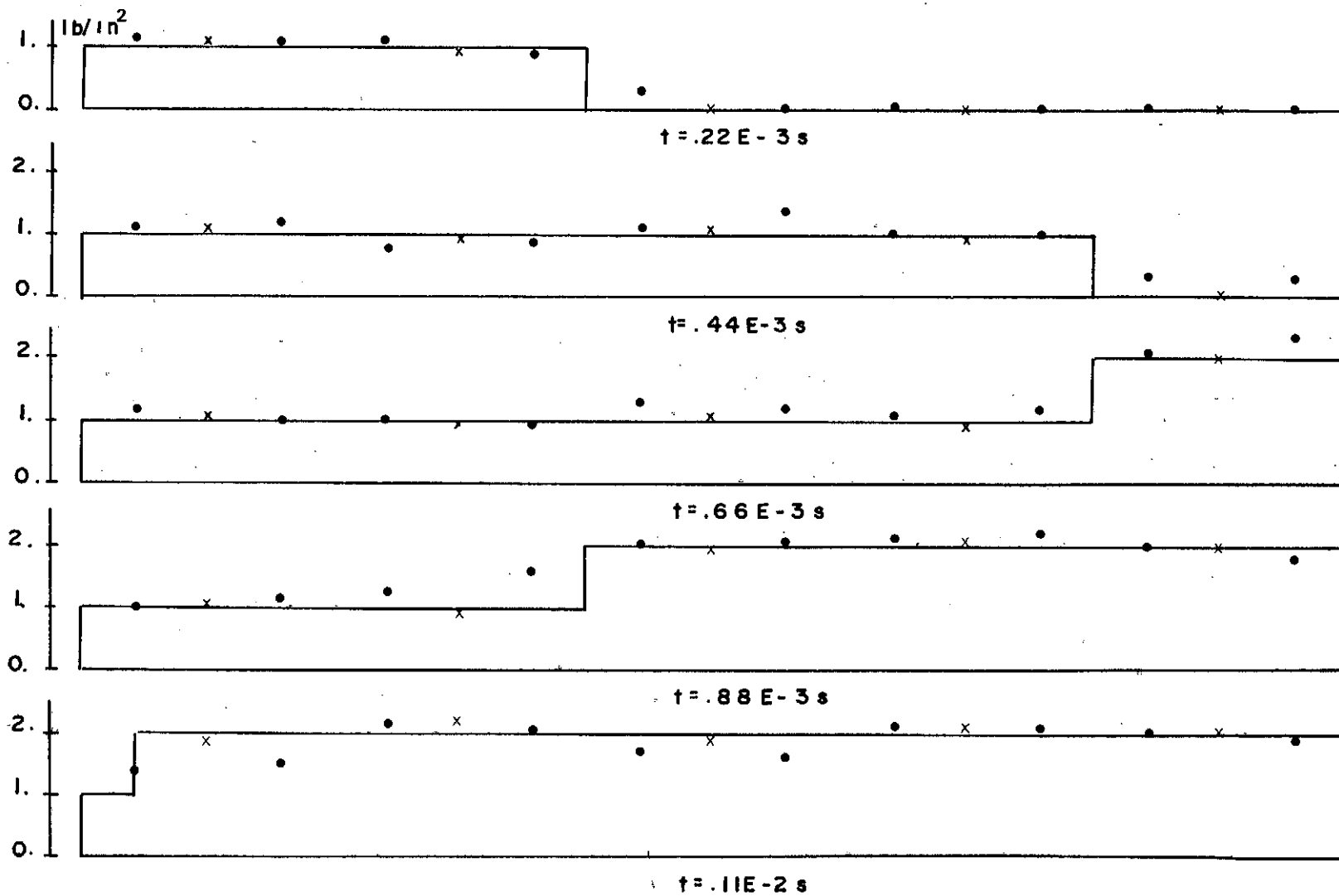
$$\ell = 0.935 \times 10^{-4} \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$$

$$P = 1 \text{ lb/in}^2$$

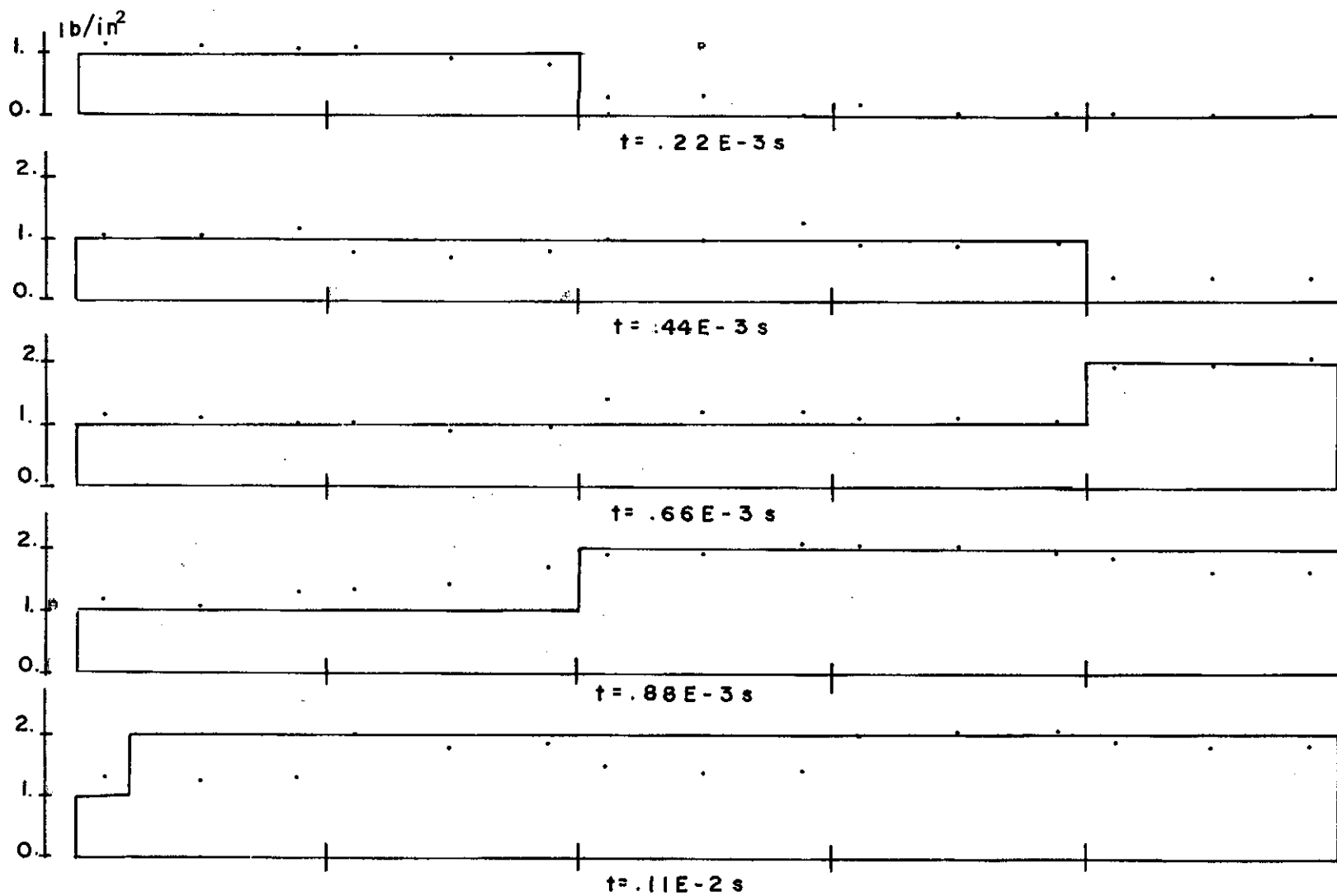
$$Y_{st} = 10^{-30} \text{ lb/in}^2$$

{	—	SOLUÇÃO TEÓRICA [REF. 2-11]]
		ELEMENTO QUADRÁTICO	
	•	PRES. ESTUDO - GAUSS (2 × 2)	
	.	PRES. ESTUDO - GAUSS (3 × 3)	
		ELEMENTO LINEAR	
	x	PRESS. ESTUDO - GAUSS (1 × 1)	

Fig. [7.18] Propagação De Ondas Em Meio Fluido



FIG[7.19.a] ONDAS DE COMPRESSÃO CONFINADA (GAUSS (1x1), (2x2))



FIG[7.19.b] ONDAS DE COMPRESSÃO CONFINADA (GASS (3 x 3))

7.6 - ENSAIO DINÂMICO

O corpo de prova de solo silte-arenoso, com propriedades físicas e dimensões geométricas apresentadas na Fig. 7.20, é ensaiado dinamicamente sob condições drenadas. O ensaio consiste em verificar o comportamento do corpo de prova (c.p.) , quando submetido a um carregamento axial com 0.14s de duração aplicado segundo a lei de variação ($P \times t$) (Fig. 7.20). A resposta dinâmica do (c.p.) é função do estado de tensões de confinamento σ_3 . Este estado de tensões não só caracteriza as propriedades físicas, como também influencia o regime plástico do solo. Devido à influência exercida pelo estado de tensões σ_3 sobre os resultados, este é simulado no presente estudo, de dois modos:

- No primeiro, é considerado como um carregamento externo dinâmico de aplicação súbita e constante ao longo do tempo, resultando as respostas dinâmicas fornecidas na Fig. 7.21 (ENSAIO 1), correspondentes ao deslocamento vertical do ponto nodal A (Fig. 7.20).
- No segundo, é introduzido como estado de tensões iniciais, o que reproduz razoavelmente o modelo real, resultando as respostas dinâmicas das Figs. 7.23 e 7.24 (ENSAIO 2).

A integração no tempo do ensaio 1 é conduzida pelo algoritmo de integração de Newmark e pelo algoritmo de integração do presente estudo. Pelo algoritmo de Newmark são obtidas as respostas dinâmicas elástica e elasto-plástica de von Mises e Drucker-Prager, as quais são comparadas às fornecidas pelo algoritmo de diferença central compreendendo os modelos elástico e elasto-plástico de von-Mises, Mohr-Coulomb Tradicional e Mohr-Coulomb Modificado. Com relação ao critério de Mohr-Coulomb Mo-

dificado, há de se ressaltar que as envoltórias aproximadas são caracterizadas pelo parâmetro $RA = \frac{XA}{c \times \cotg(\phi)} \%$, onde os coeficientes estão definidos nos Capítulos III e IV. Na Fig. 7.22, seções meridionais hiperbólicas ($\bar{\sigma} \times \sigma_m$) associadas a este critério, para diversos valores de RA são comparadas à seção meridional real de Mohr-Coulomb, representada por uma linha reta (Capítulos III e IV).

Na Fig. 7.21 pode-se constatar a boa concordância dos resultados fornecidos por ambos algoritmos ao se comparar as soluções elásticas, as soluções elasto-plásticas de Von Mises e a solução elasto-plástica de Drucker-Prager com a solução de Mohr-Coulomb Modificado (RA = 0.01%).

A boa proximidade das soluções de Drucker - Prager e Mohr-Coulomb Modificado e o afastamento destas da solução de Mohr-Coulomb Tradicional, decorre da não existência de pontos singulares nas duas primeiras formulações. (excetuando-se o vértice da superfície de Drucker-Prager, a qual não influencia significativamente esta comparação). As pesquisas desenvolvidas no presente estudo revelaram que os estados de tensões próximos dos pontos singulares conduzem à ineficiência da formulação elasto-plástica. Consequentemente o estado de tensões não é corrigido e atualizado à superfície de escoamento, o que prejudica sensivelmente os resultados fornecidos pela formulação de Mohr-Coulomb Tradicional.

A integração no tempo do ensaio 2 é realizada pelo algoritmo de integração explícita de diferença central, com os resultados apresentados na Fig. 7.23. Comparando-se estes resultados e os da Fig. 7.21, com relação às soluções de Mohr-Coulomb Tradicional e Mohr-Coulomb Modificado (RA = 0.01%), verifica-se

que o ensaio 2 fornece deslocamentos maiores que o ensaio 1. Isto se deve à introdução do estado de tensões iniciais, que acelera a plastificação do material, e principalmente devido a ocorrência de tensões esféricas de tração acima do limite permitido pelo solo, Fig. 7.6.1, conduzindo à anulação das tensões correspondentes. Esta condição é compatível fisicamente e matematicamente satisfatória, já que o estado de tensões associado ao campo de deslocamentos atualizado é utilizado no cálculo do campo de deslocamentos do intervalo de tempo seguinte. Este tracionamento implica no enfraquecimento estrutural e daí a distorção mais acentuada. É conveniente salientar que no ensaio 1 as tensões esféricas de tração não atingem o nível máximo devido ao confinamento introduzido pela tensão σ_3 (constante ao longo do tempo), a qual comprime dinamicamente o corpo de prova durante todo o ensaio.

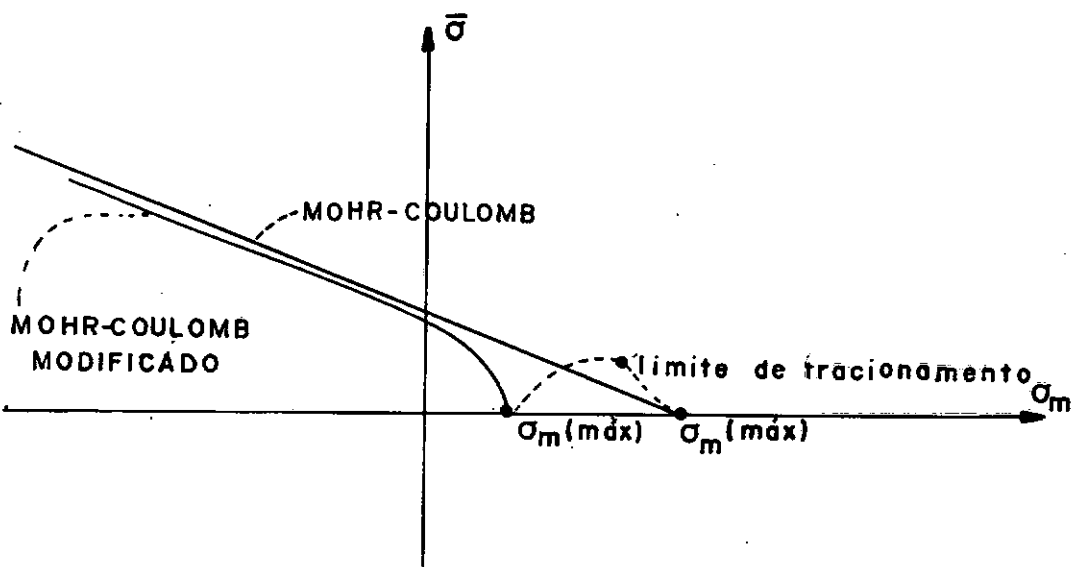


FIG.[7.6.1]

Na Fig. 7.24 são comparados os resultados da Fig. 7.23 com a solução de Mohr-Coulomb Modificado com $RA = 50\%$, não havendo alteração significativa nas respostas.

O fato do parâmetro XA não ter influenciado a plastificação do solo silte-arenoso neste ensaio não implica em sua pequena importância, pois em outros problemas, por exemplo, solos mais coesivos, tal condição poderia não ocorrer.

A evolução da tensão esférica com o tempo para o quarto ponto de integração do elemento 3 é ilustrada na Fig. 7.25. Pode-se constatar o tracionamento do solo e o instante a partir do qual a condição limite é alcançada. Estas tensões esféricas foram extraídas das mesmas análises que forneceram as respostas das Figs. 7.23 e 7.24.

Ainda com relação à Fig. 7.25, deve-se notar que a curva $(S_m \times t)$ referente ao critério de Mohr-Coulomb Tradicional, mostra uma característica muito importante, que corresponde ao tracionamento máximo do ponto de integração, com as tensões sendo mantidas nulas durante um período de tempo e posteriormente a recompressão do referido ponto. Pode-se interpretar fisicamente tal fato pela "abertura" e "fechamento" do ponto de integração.

Como no presente estudo a formulação elasto-plástica associada aos critérios de Mohr-Coulomb pressupõe o comportamento plástico-perfeito, todos os estados de tensões plásticos após corrigidos devem encontrar-se sobre a superfície de escoamento. Esta condição pode ser visualizada na Fig. 7.27, onde são traçadas as seções meridionais real de Mohr-Coulomb e hiperbólica aproximada ($RA = 50\%$). A seção meridional hiperbólica está particularizada à $\theta = \frac{\pi}{6}$ (Capítulo III), o que implica em se ob

ter o $\bar{\sigma}_+$ correspondente a cada estado de tensões elástico e plástico, ou seja:

$$\bar{\sigma}_+ = \frac{\bar{\sigma}}{g(\theta)}$$

(com $\bar{\sigma}$ e θ função do estado de tensões (Capítulo III))

Logicamente os estados de tensões que se encontram no interior da seção são os estados elásticos. Os estados de tensões utilizados nesta representação foram gerados no sexto ponto de integração do elemento 3 (IE = 3 e NI = 6) no ensaio 2, cuja evolução da tensão esférica com o tempo é apresentada na Fig. 7.26.

Os resultados discutidos anteriormente foram obtidos com o intervalo de integração de $0.5 \times 10^{-4} \text{ s}$, correspondente à décima parte do intervalo crítico $\Delta t_c = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$. Esta redução no intervalo é justificada com base nas explicações referentes à instabilidade numérica do algoritmo de diferença central apresentadas no item 2.6. Porém, com a finalidade de verificar a eficiência computacional do algoritmo do presente estudo, as soluções elasto-plásticas anteriores foram reproprocessadas para intervalos maiores, constatando-se que a solução elasto-plástica de von Mises do ensaio 1 não é alterada com estes novos intervalos, reduzindo cerca de cinco vezes o esforço computacional. Tais resultados encontram-se nas Tabelas 7.1 e 7.2, referentes ao deslocamento vertical dos pontos nodais A e B (Fig. 7.20).

TABELA PARA ANÁLISE DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL

TEMPO (s)	NEWMARK	DIF. CENTRAL	DIF. CENTRAL	DIF. CENTRAL
	$\Delta t = 0.5 \text{ E-3}$	$\Delta t = 0.5 \text{ E-4}$	$\Delta t = 0.25 \text{ E-3}$	$\Delta t = 0.5 \text{ E-3}$
0.01	-. 44722 E-02	-. 29972 E-02	-. 29903 E-02	-. 29684 E-02
0.02	-. 15683 E-01	-. 15131 E-01	-. 15123 E-01	-. 15066 E-01
0.03	-. 342810 E-01	-. 32723 E-01	-. 32747 E-01	-. 32759 E-01
0.04	-. 54000 E-01	-. 52790 E-01	-. 52802 E-01	-. 52829 E-01
0.05	-. 826012 E-01	-. 80437 E-01	-. 80390 E-01	-. 80456 E-01
0.06	-. 146488 E+00	-. 13918 E+00	-. 13921 E-00	-. 13915 E-00
0.07	-. 265713 E+00	-. 24847 E+00	-. 24851 E-00	-. 24855 E-00
0.08	-. 452741 E+00	-. 42416 E+00	-. 42414 E-00	-. 42432 E-00
0.09	-. 686936 E+00	-. 64915 E+00	-. 64917 E-00	-. 64932 E-00
0.10	-. 949608 E+00	-. 90806 E+00	-. 90808 E-00	-. 90823 E-00
0.11	-. 121017 E+01	-. 11746 E+01	-. 11746 E+01	-. 11748 E-01
0.12	-. 144425 E+01	-. 14208 E+01	-. 14208 E+01	-. 14210 E-01
0.13	-. 162639 E+01	-. 16226 E+01	-. 16226 E+01	-. 16229 E-01
0.14	-. 173287 E-01	-. 17513 E-01	-. 17514 E+01	-. 17516 E-01
Tempo de Processador Acumulado	2360 (s)	5027 (s)	1981 (s)	1260 (s)

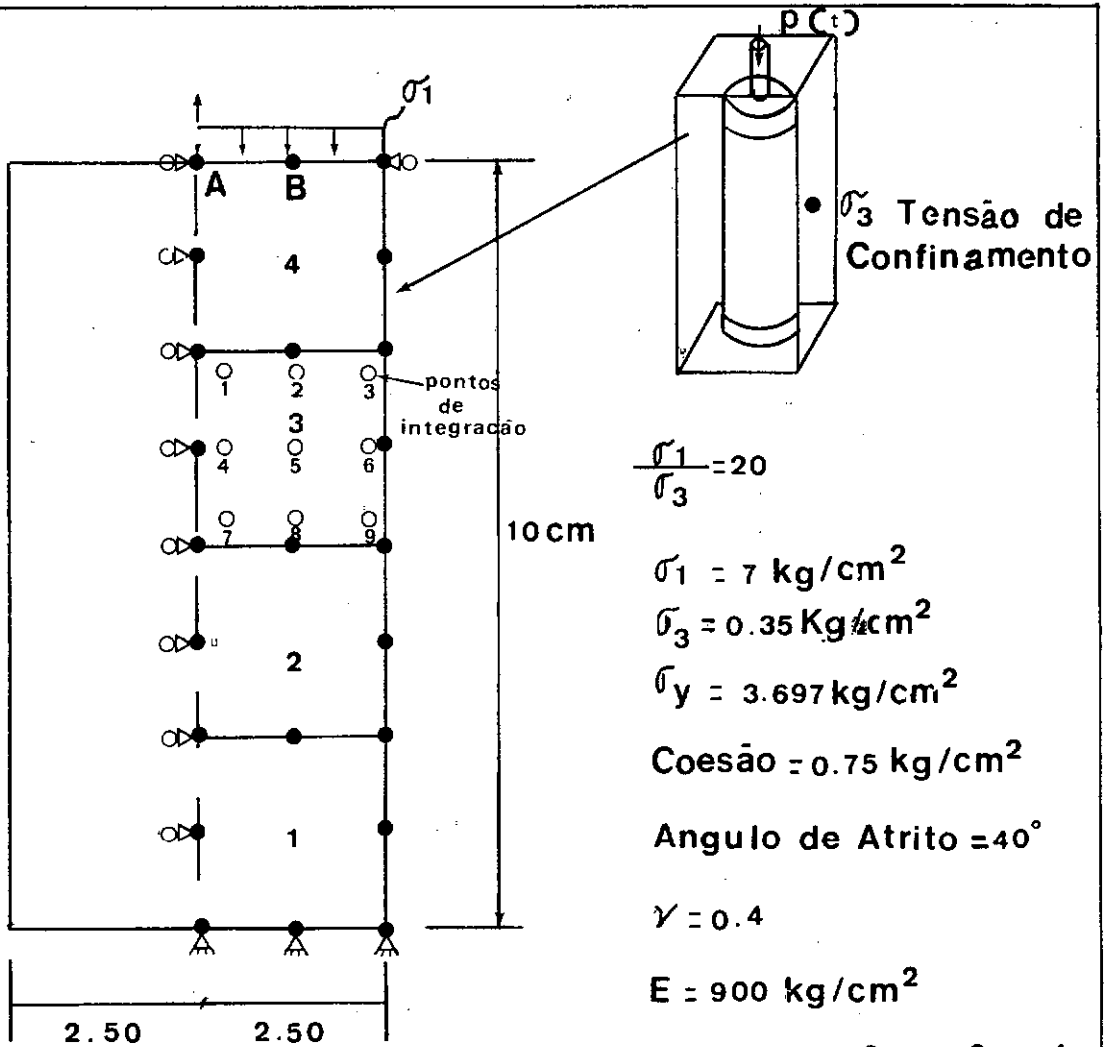
DESLOCAMENTOS DO PONTO NODAL A

TABELA 7.1

TEMPO (s)	NEWMARK	DIF. CENTRAL	DIF. CENTRAL	DIF. CENTRAL
	$\Delta t = 0.5 \text{ E-3}$	$\Delta t = 0.5 \text{ E-4}$	$\Delta t = 0.25 \text{ E-3}$	$\Delta t = 0.5 \text{ E-3}$
0.01	-. 396559 E-02	-. 40421 E-02	-. 40372 E-02	-. 040259 E-02
0.02	-. 152753 E-01	-. 15410 E-01	-. 15406 E-01	-. 15394 E-01
0.03	-. 333194 E-01	-. 33069 E-01	-. 33058 E-01	-. 33020 E-01
0.04	-. 53115 E-01	-. 52739 E-01	-. 52735 E-01	-. 52733 E-01
0.05	-. 816272 E-01	-. 81671 E-01	-. 81692 E-01	-. 81744 E-01
0.06	-. 140737 E+00	-. 14098 E-00	-. 14100 E-00	-. 14108 E-00
0.07	-. 25017 E+00	-. 25230 E-00	-. 25230 E-00	-. 25236 E-00
0.08	-. 418953 E+00	-. 42314 E-00	-. 42314 E-00	-. 42316 E-00
0.09	-. 629378 E+00	-. 63275 E-00	-. 63277 E-00	-. 63291 E-00
0.10	-. 86217 E+00	-. 86325 E-00	-. 86326 E-00	-. 86342 E-00
0.11	-. 109366 E+01	-. 10924 E+01	-. 10924 E+01	-. 10926 E+01
0.12	-. 130338 E+01	-. 12994 E+01	-. 12994 E+01	-. 12996 E+01
0.13	-. 147018 E+01	-. 14660 E+01	-. 14660 E+01	-. 14662 E+01
0.14	-. 157333 E+01	-. 15731 E+01	-. 15732 E+01	-. 15734 E+01

DESLOCAMENTOS DO PONTO NODAL B

TABELA 7.2



$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 20$$

$$\sigma_1 = 7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 0.35 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = 3.697 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Coesão} = 0.75 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Angulo de Atrito} = 40^\circ$$

$$\nu = 0.4$$

$$E = 900 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho = 2.166 \times 10^{-3} \text{ kg.s}^2/\text{cm}^4$$

$$\Delta t = 0.5 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Variação Da Carga Ao Longo do tempo

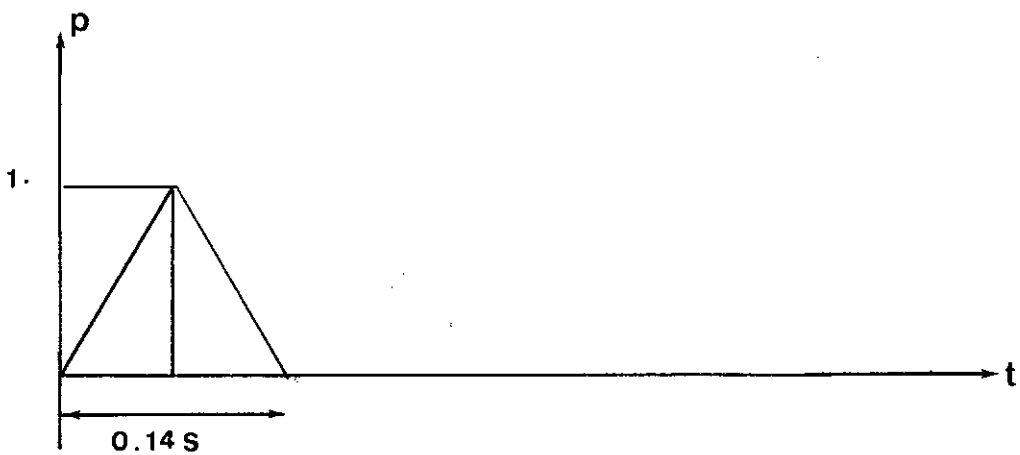


Fig. [7.20] Ensaio Dinâmico

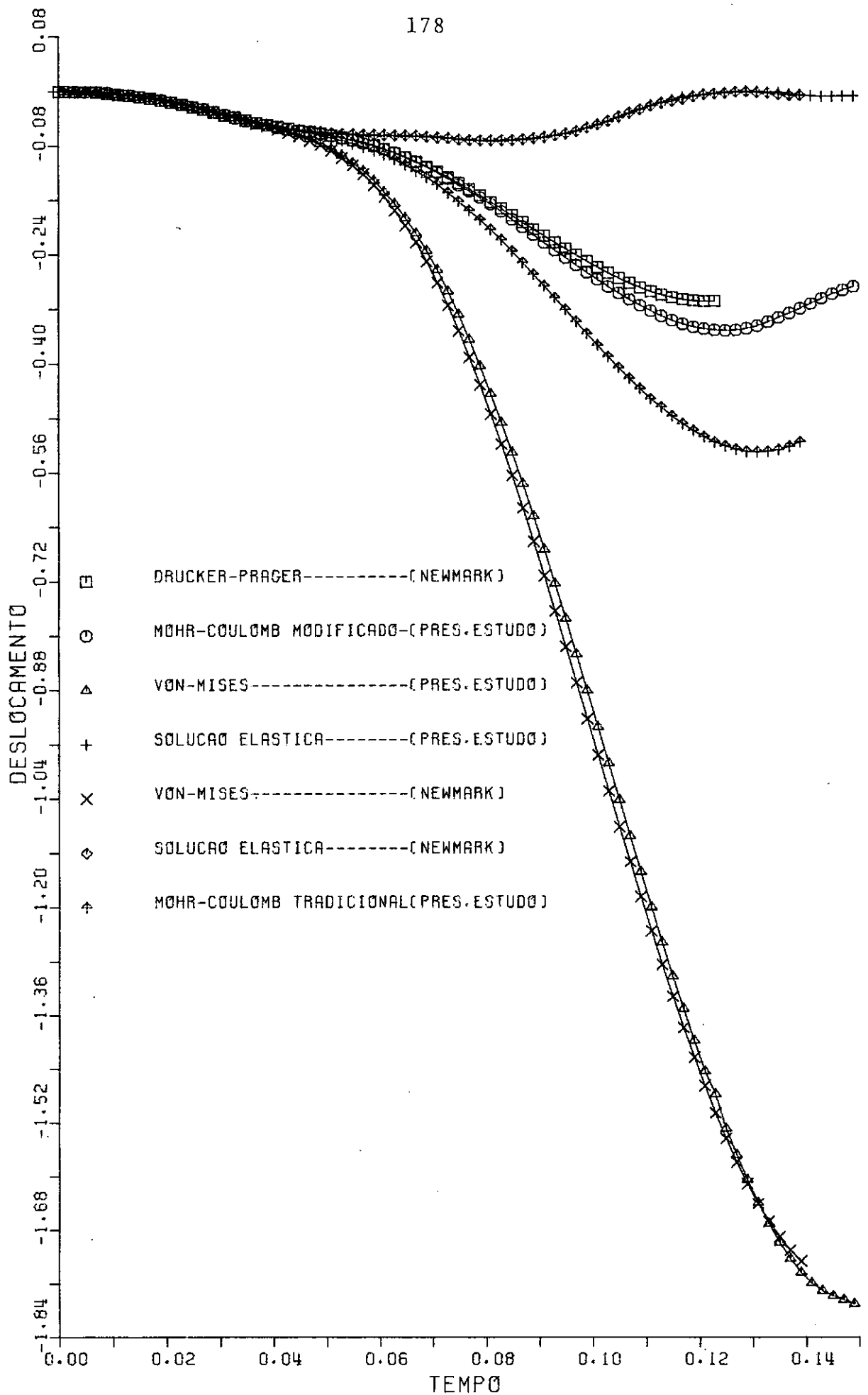


FIGURA 7.21] RESP. DINAMICA ELASTO-PLASTICA-CORPO DE PROVA-CNE

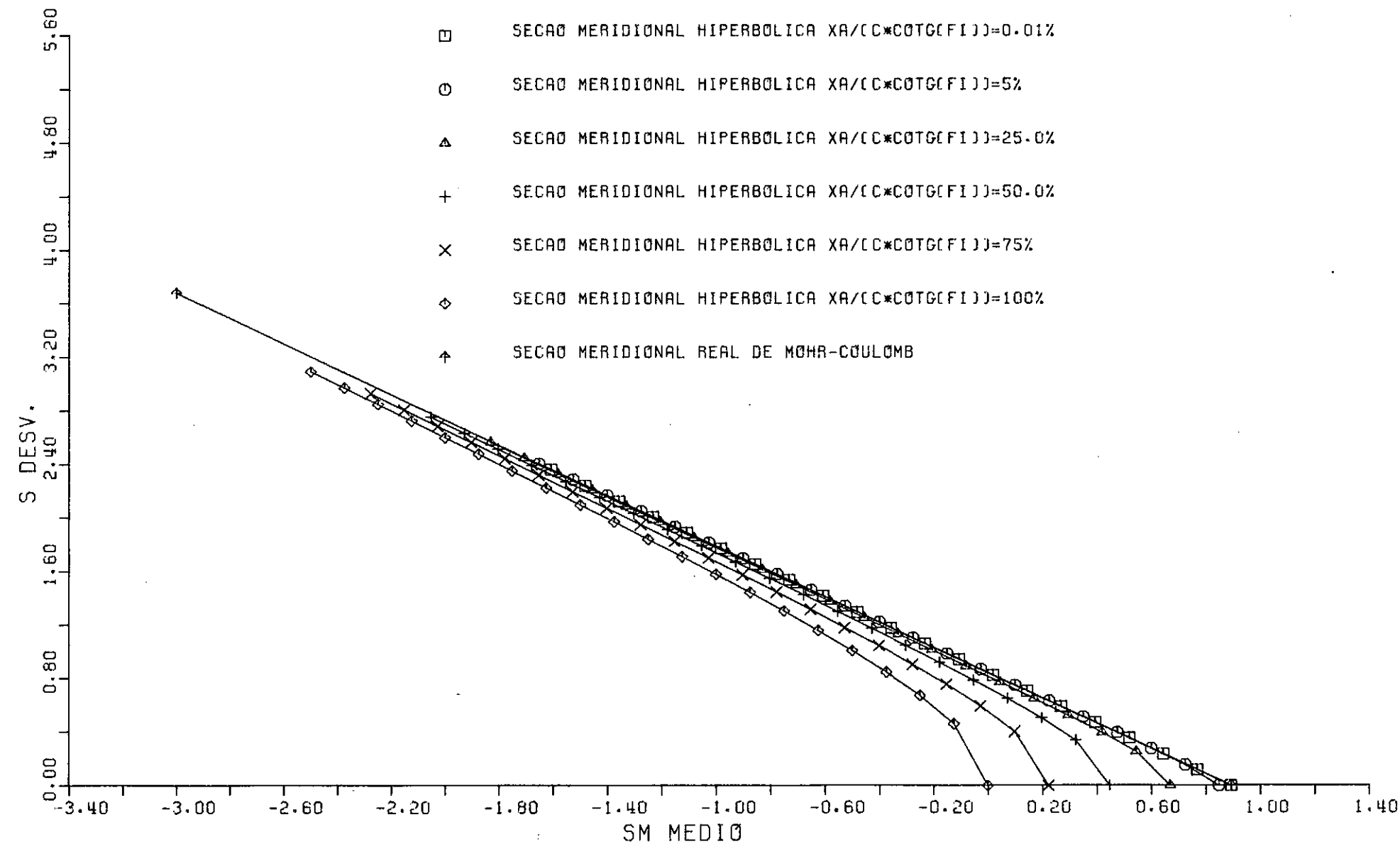


FIGURA 7.22 ENV. APROXIMADA DE MOHR-COULOMB (XA-VARIÁVEL)

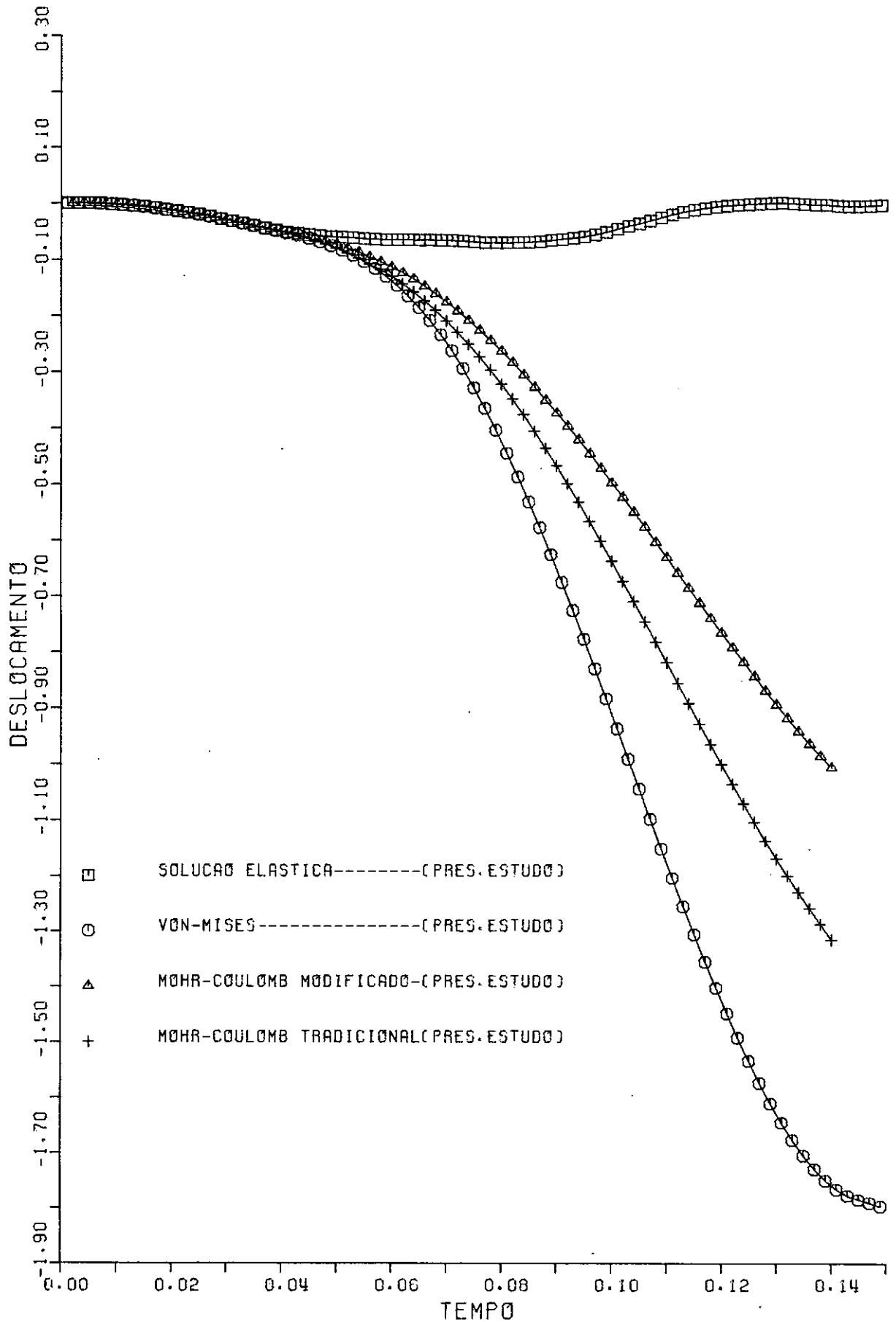


FIGURA 7.23 RESP. DINÂMICA ELÁSTO-PLÁSTICA-CORPO DE PROVA-TI

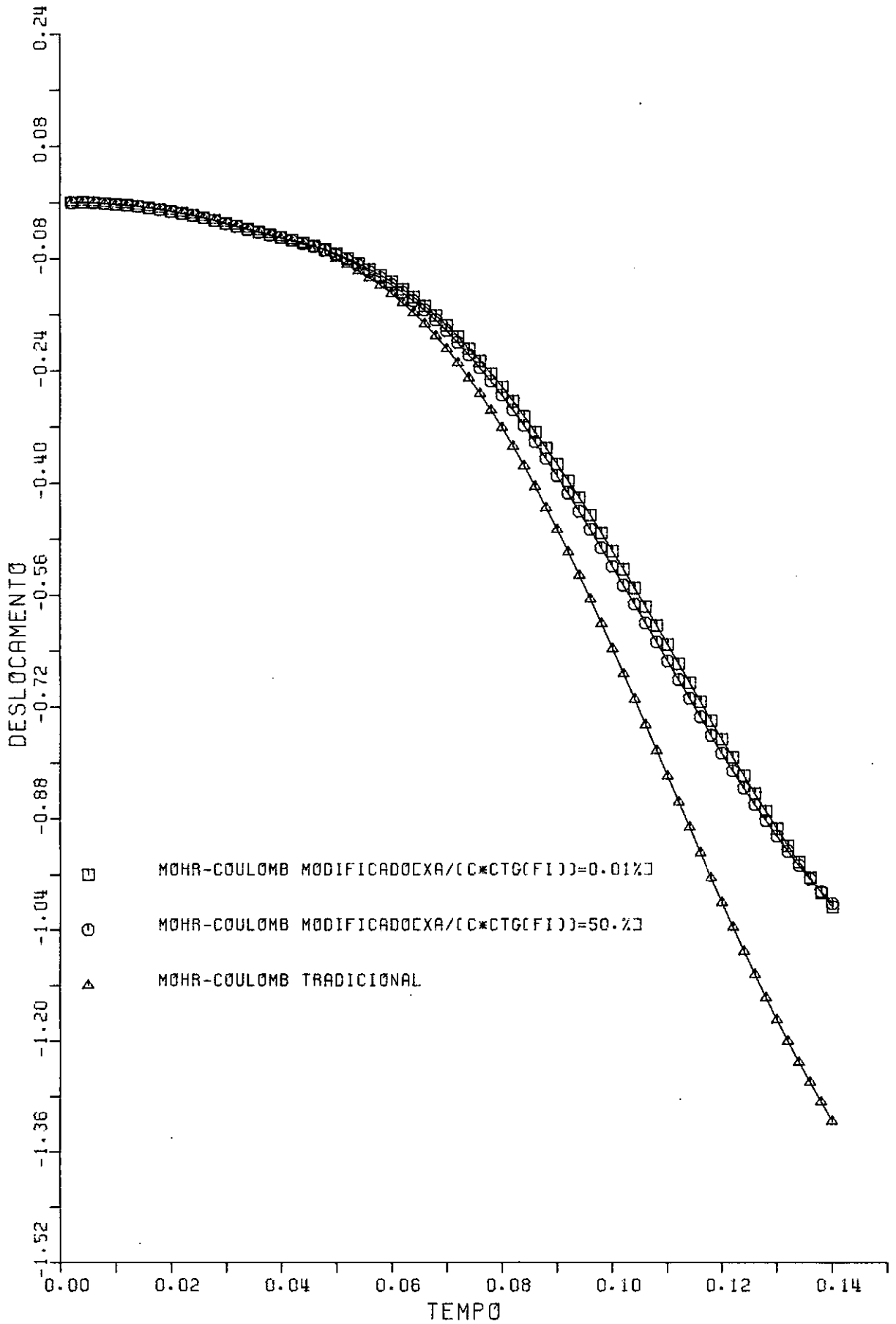
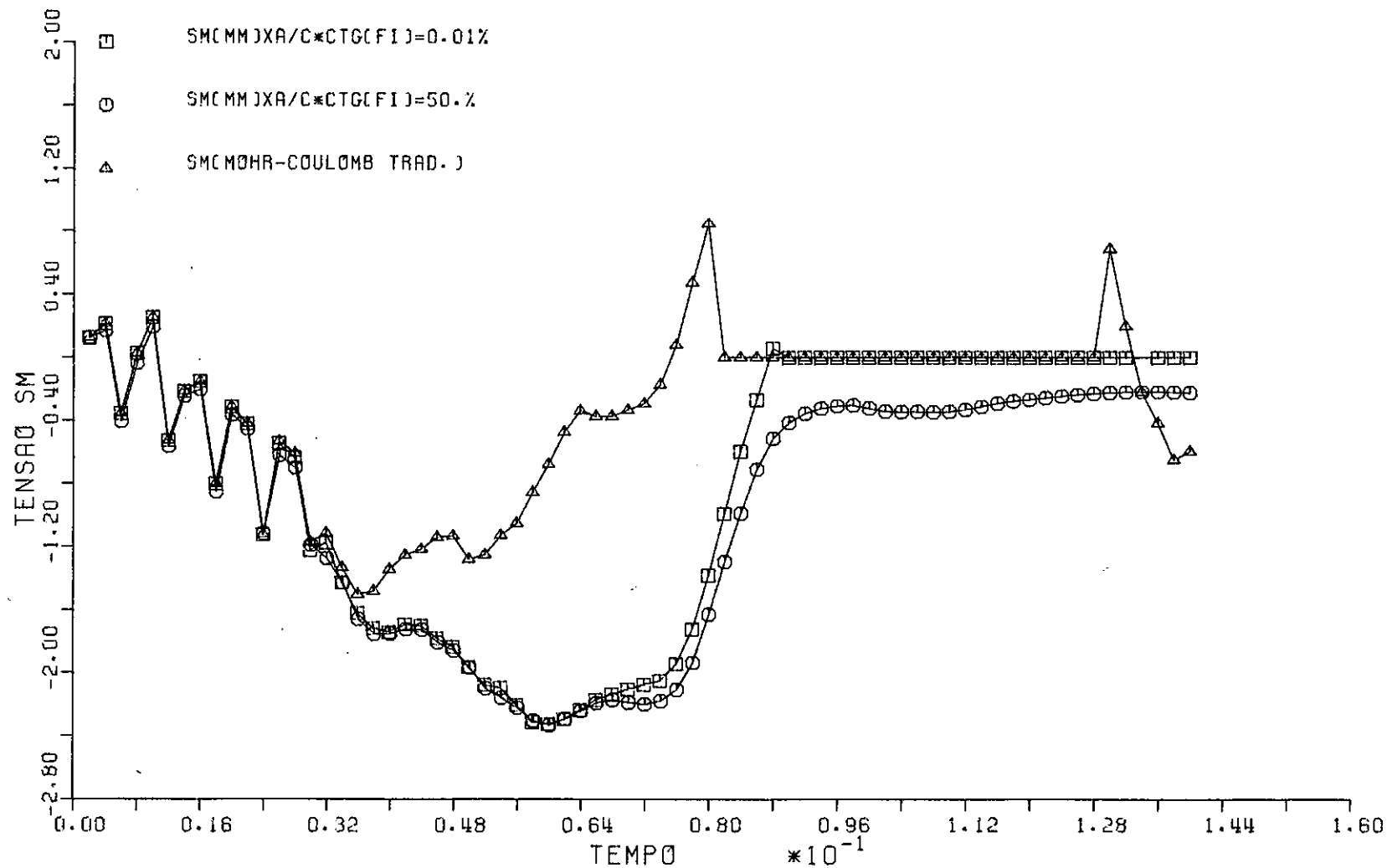


FIGURA 7.24] RESP. DINAMICA ELASTO-PLASTICA (TI) X A (VARIÁVEL)



FIGURAC7.25]TENSÃO ESFERICA MEDIACTI](XA VARIÁVEL)(IE=3,NI=4

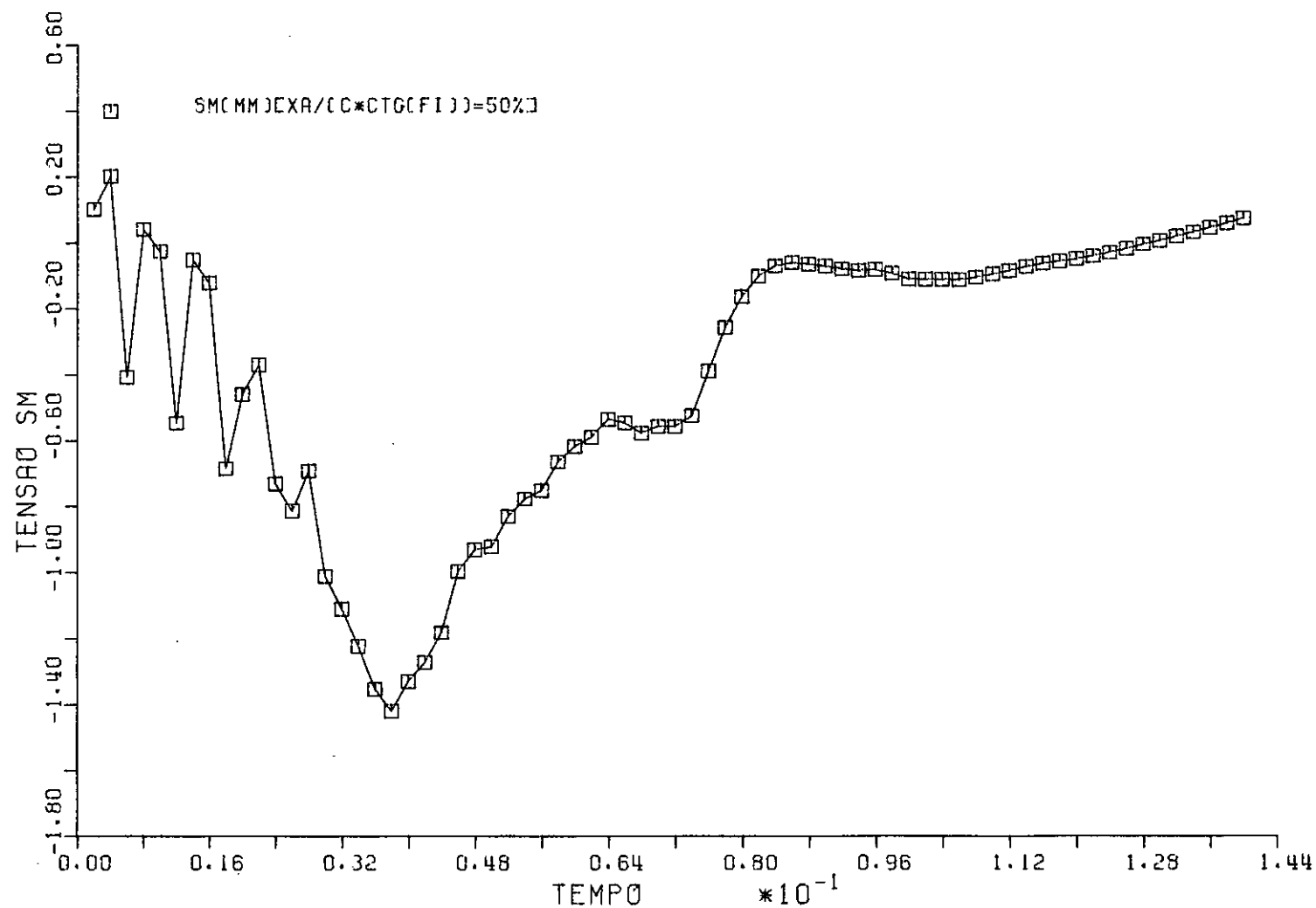


FIGURA 7.26 TENSÃO ESFERICA MEDIA (TI) (XA=0.4469) (IE=3, NI=6)

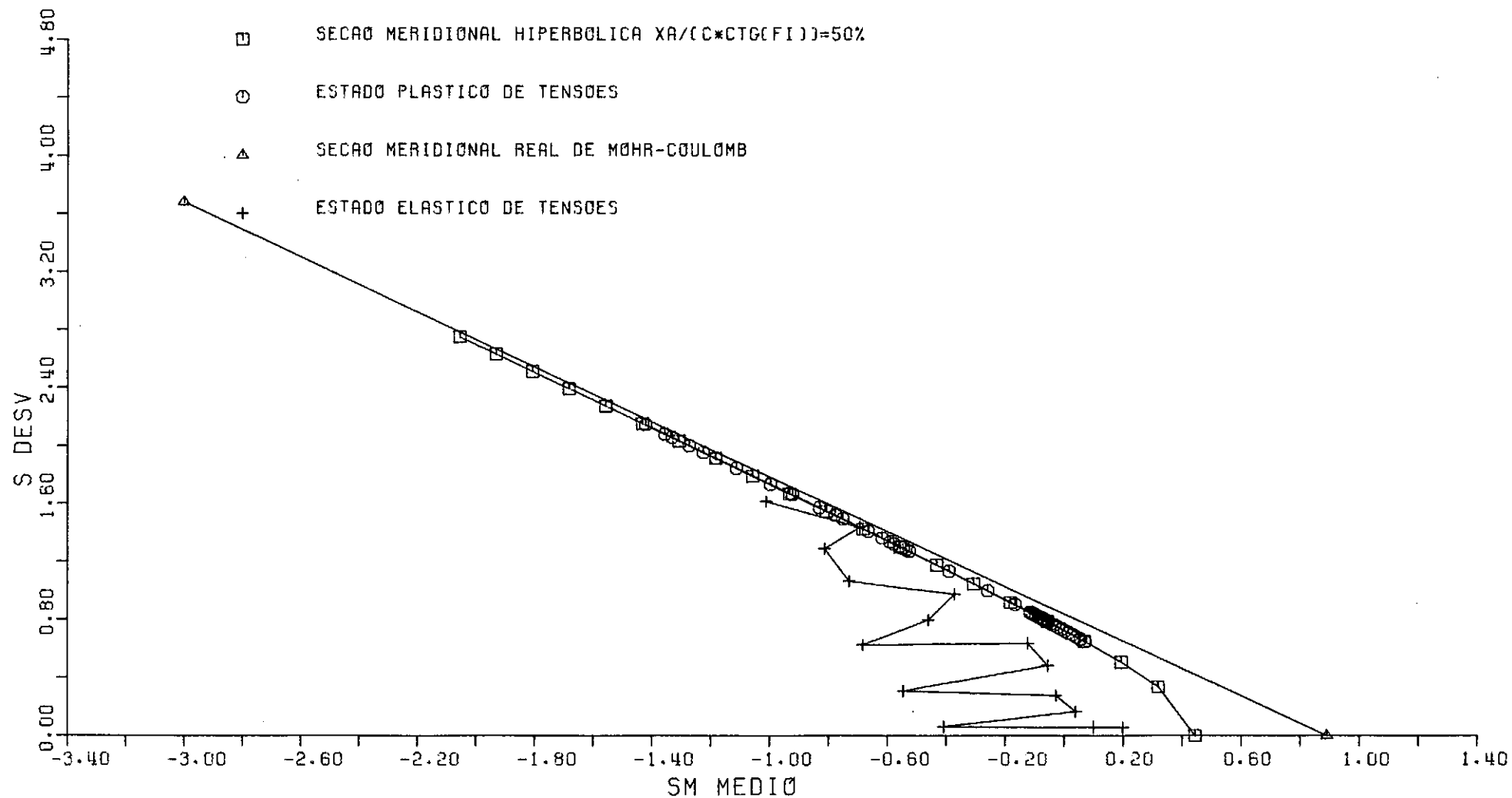


FIGURA 7.27] ENV. APROX. DE MOHR-COULOMB $[X_A/(C * CTG(FI)) = 50\%]$

7.7 - INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

Com a finalidade de verificar a influência das interfaces em um sistema estrutural, bem como o comportamento do elemento implementado, analisa-se a resposta dinâmica de uma fundação circular assente sobre um maciço de solo argiloso (Fig. 7.28). A fundação circular é submetida a um carregamento distribuído súbito e constante e é considerada rígida o suficiente de tal modo a não se considerar a possibilidade de sua plastificação. Admite-se que em decorrência do transiente de curta duração estudado, não haja possibilidade de drenagem, analisando-se o solo segundo tensões totais em regimes elástico e plástico. Sob tais condições o solo é considerado seguir o critério de escoamento de von Mises como material plástico-perfeito (ref. [4.12]). Em todos os resultados discutidos posteriormente são comparados os sistemas estruturais com e sem interface, utilizando-se no processo de discretização dos meios em interação, elementos isoparamétricos de sólido de revolução de quatro pontos nodais com integração (2 x 2).

Na Fig. 7.29 é fornecida a resposta dinâmica elástica referente ao deslocamento vertical do ponto nodal 1. O mesmo deslocamento é apresentado na Fig. 7.30, porém com o solo analisado em regime plástico. Pelos resultados pode-se observar que em ambos os casos o sistema com interface conduz a maiores deslocamentos verticais. Este resultado reproduz fisicamente o modelo real, pois a interface permite o deslocamento relativo entre a fundação e o solo e o desligamento das superfícies em contato. Estas características introduzidas pela consideração das interfaces implicam numa redução da resistência estrutural ao impacto.

Na Fig. 7.31 o processo interativo que se desenvolve

ve durante a vibração entre a fundação circular e o solo fica bem evidenciada. Dois gráficos são plotados:

- velocidade vertical x tempo
- tensão normal x tempo

Verifica-se a diferença entre a velocidade vertical do bloco e o solo adjacente, a qual aumenta após o desligamento do contato vertical, o que é caracterizado na curva $(\sigma_n \times t)$ quando σ_n se anula em ambos os pontos de integração.

Neste sistema estrutural a interface cumpre a finalidade de transmitir a excitação do bloco de fundação ao solo adjacente. Este efeito é verificado com o crescimento da velocidade vertical do ponto nodal 5 (Fig. 7.31), durante o intervalo de tempo no qual as tensões normais não se anulam, após o que esta velocidade passa a decrescer. É importante lembrar que apesar de σ_n diminuir de 0.001 à 0.002 s, a excitação vertical transmitida não diminui, devido ao modelo matemático representar o comportamento não dilatante.

Durante o movimento vibratório (bloco de fundação + solo), ondas de pressão são propagadas através dos dois meios. De modo a se verificar a influência que a introdução do elemento de interface exerce na propagação das ondas, apresenta-se nas Figs. 7.32 e 7.33, a distribuição de pressões verticais em uma seção vertical S_1 próxima à região de deslocamentos máximos. Se o bloco de fundação e o solo são considerados como um meio contínuo, as ondas de compressão se transmitem do bloco ao solo mais acentuadamente no mesmo período de tempo, sendo este efeito observado ao se comparar os resultados das Figs. 7.32 e 7.33. Logicamente, os parâmetros de deformabilidade do material da interface exercem influência considerável na distribuição de pres-

sões. Como explicado no Capítulo V, a deformabilidade da interface é muito próxima a do solo de fundação, por ser este material o menos resistente dos meios adjacentes. Por observação de curvas semelhantes às apresentadas nas Figs. 7.31, 7.32 e 7.33 associadas a um estudo paramétrico, conclusões semelhantes são obtidas. Há de se ressaltar contudo que parâmetros fornecidos por ensaios apropriados (refs. [5.1 e 5.3]), garantem maior confiabilidade no cálculo das respostas dinâmicas.

A configuração deformada do sistema estrutural (bloco de fundação + maciço terroso) é apresentada em diversos tempos (Figs. 7.34 à 7.41), correspondentes aproximadamente aos tempos de máximos e mínimos das respostas elástica e elasto-plástica (Figs. 7.29 e 7.30). Os deslocamentos nas configurações estão ampliados cinquenta vezes, o que distorce significativamente as regiões próximas às interfaces, exigindo os detalhes 1 e 2.

Na Fig. 7.31, mostra-se o instante a partir do qual ocorre o desligamento do contato vertical. Esta condição permanece aproximadamente durante os 0.01s iniciais, ocasionando o maior deslocamento relativo entre o bloco de fundação e o solo (Figs. 7.34 e 7.38). Por este motivo, com o solo analisado em regime plástico (Fig. 7.38), observa-se que o solo adjacente ao bloco sem interface se plastifica, o que não acontece com o solo adjacente ao bloco porém dele separado pela interface, nesta condição com $\sigma_n = 0$. Após os 0.01s iniciais as duas superfícies verticais se unem, fazendo com que o bloco por atri-to se mantenha solidário ao solo adjacente, o que é verificado nas demais configurações pela redução do deslocamento relativo entre eles.

Fundação Circular(72"x48") Sem Interface

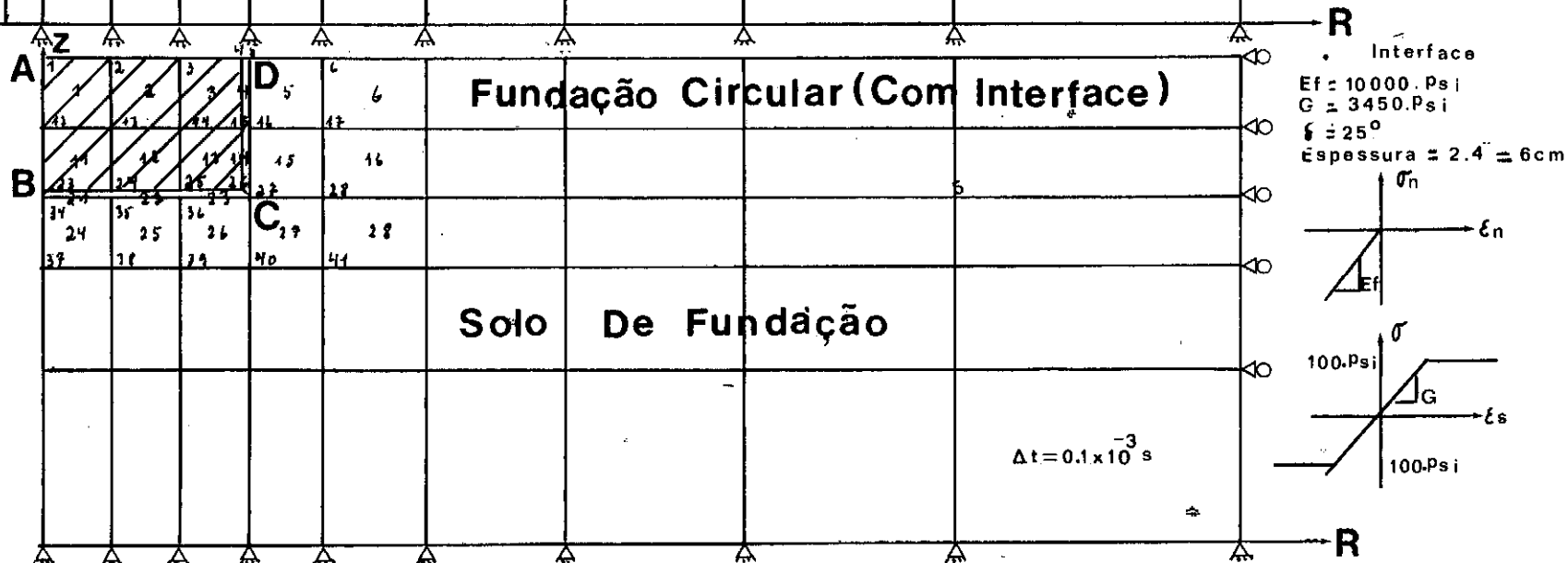
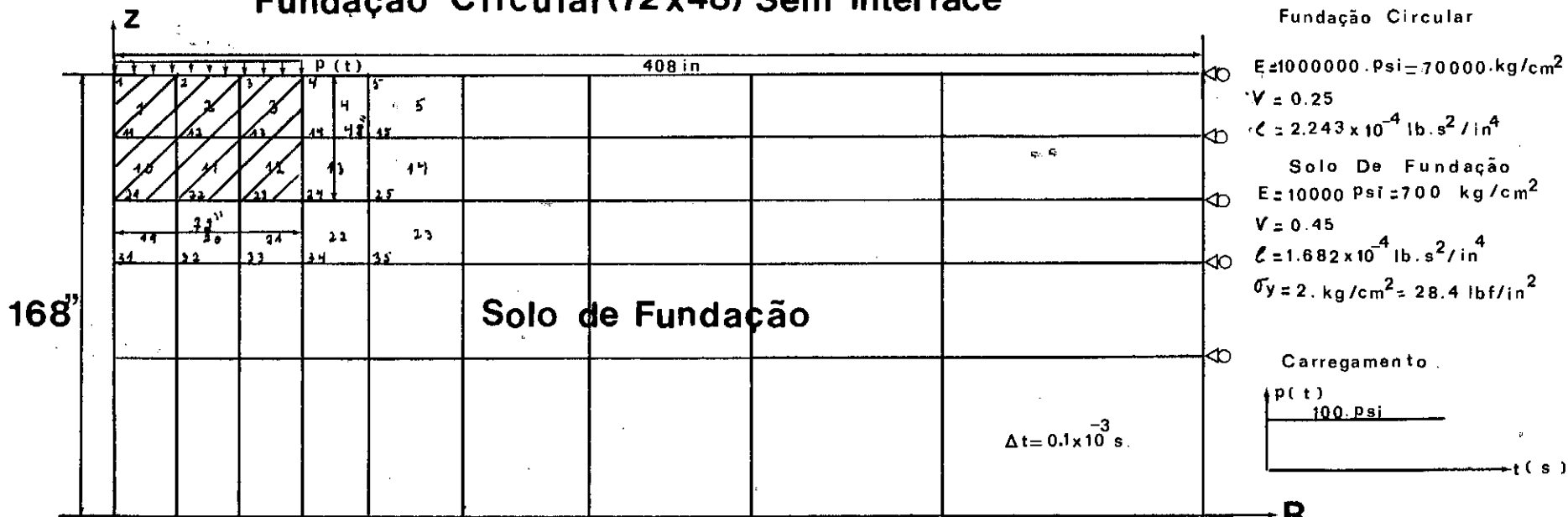


Fig. 7.28 Modelo Idealizado Para Fundação e Maciço Terroso

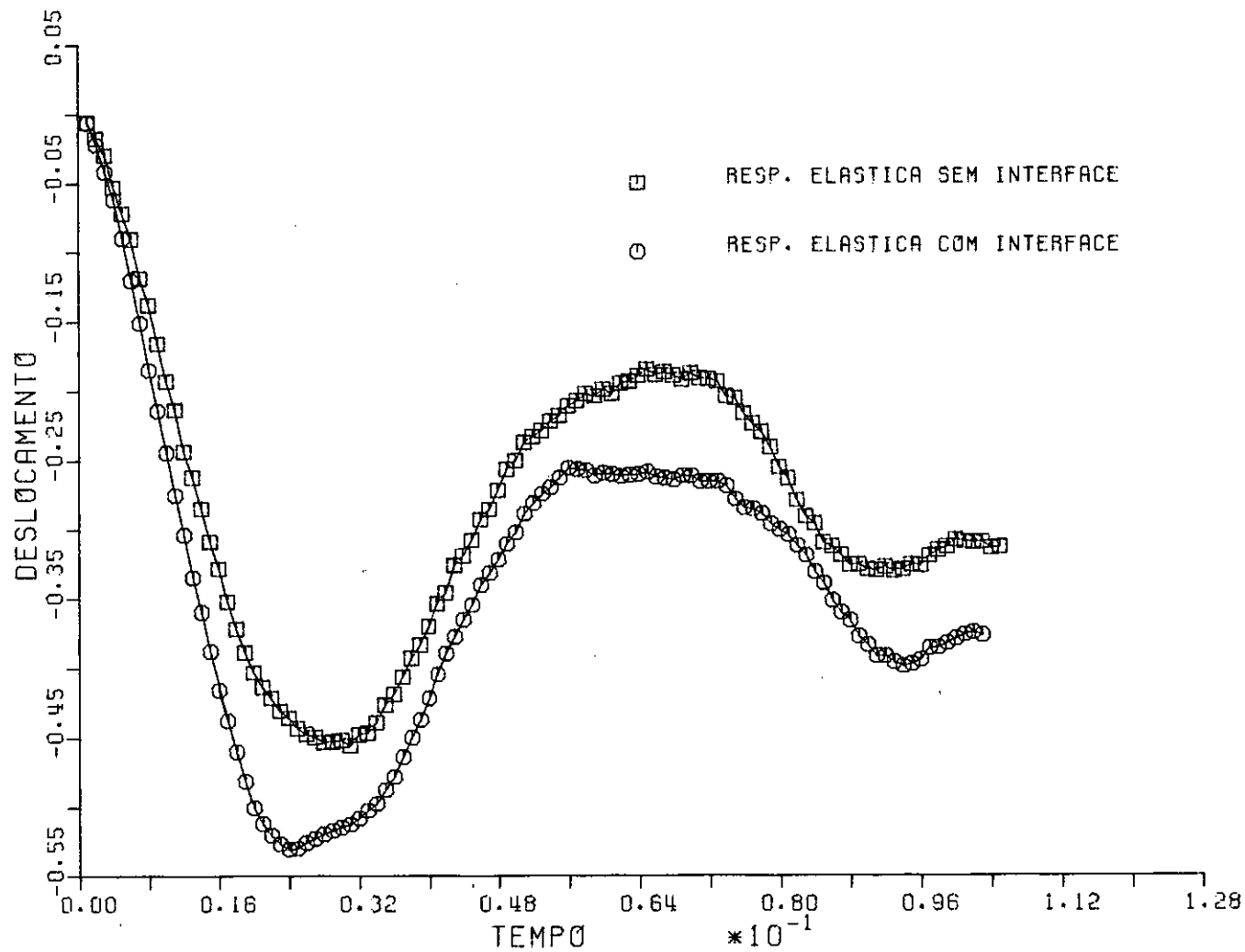


FIGURA 7.29] RESP. DINAMICA ELASTICA (FUNDACAO CIRCULAR)

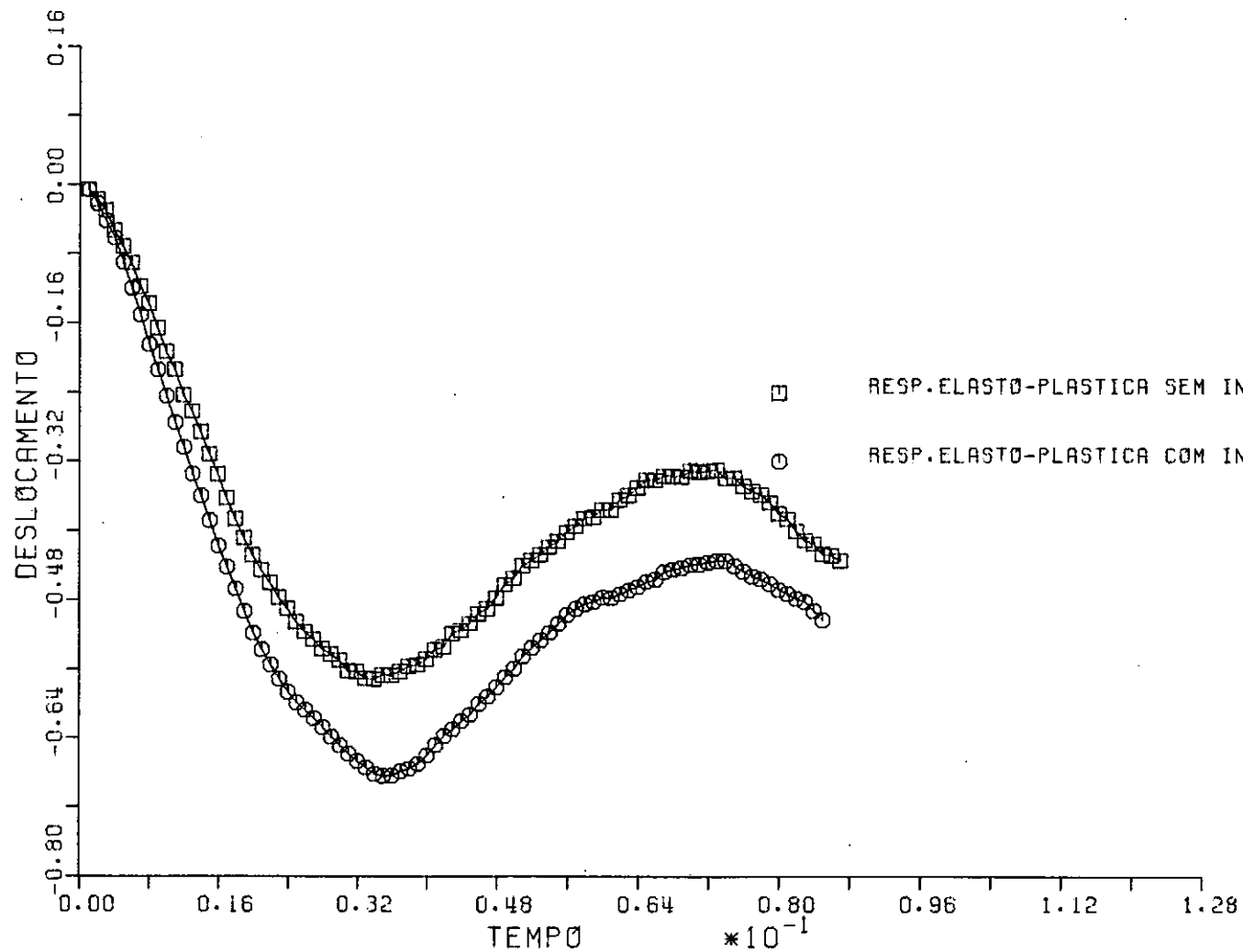


FIGURA 7.30 RESP. DINAMICA ELASTO-PLASTICA (FUNDACAO CIRCULAR)

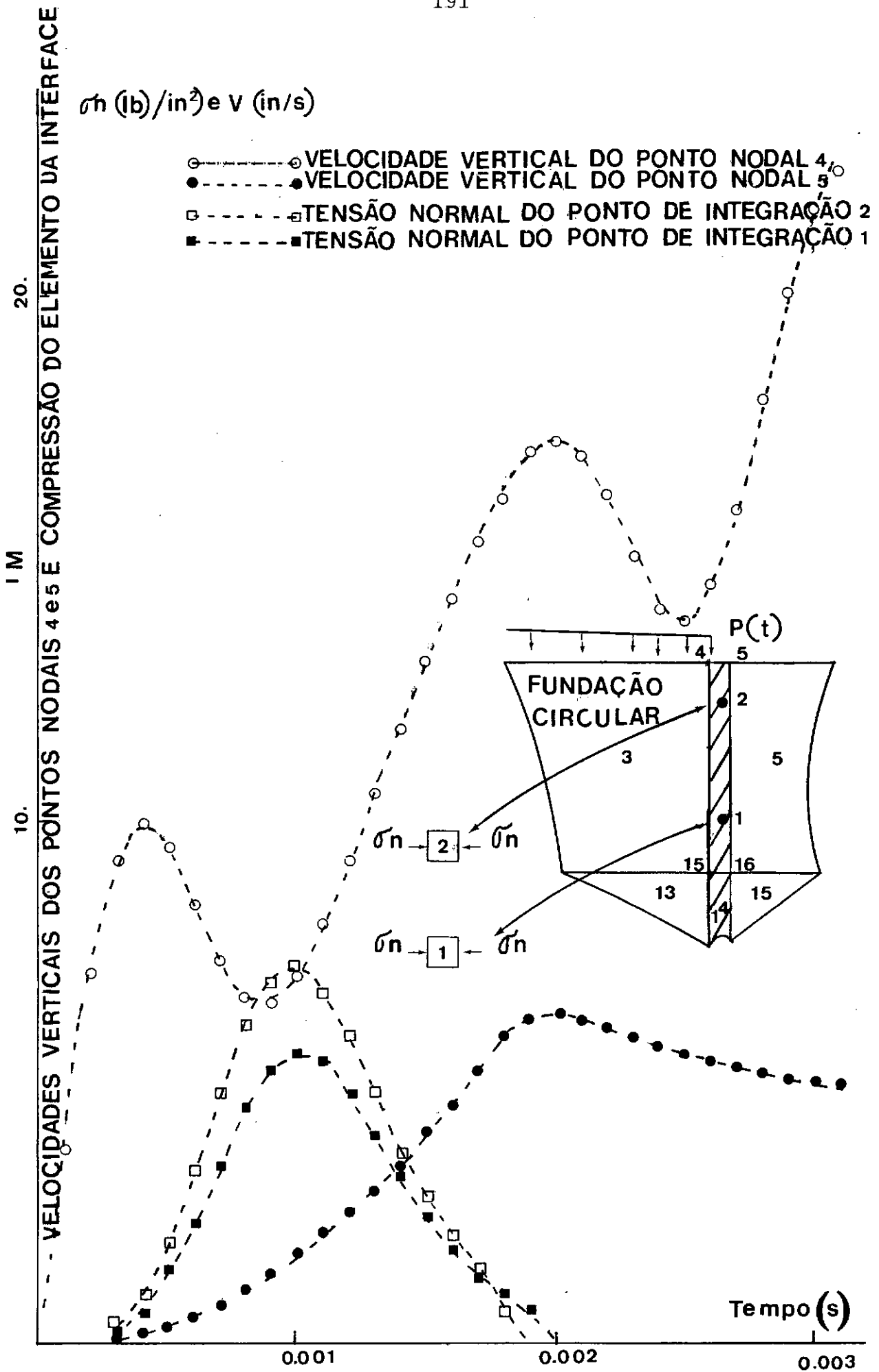


FIG. [7.3] COMPORTAMENTO DINÂMICO DA INTERFACE

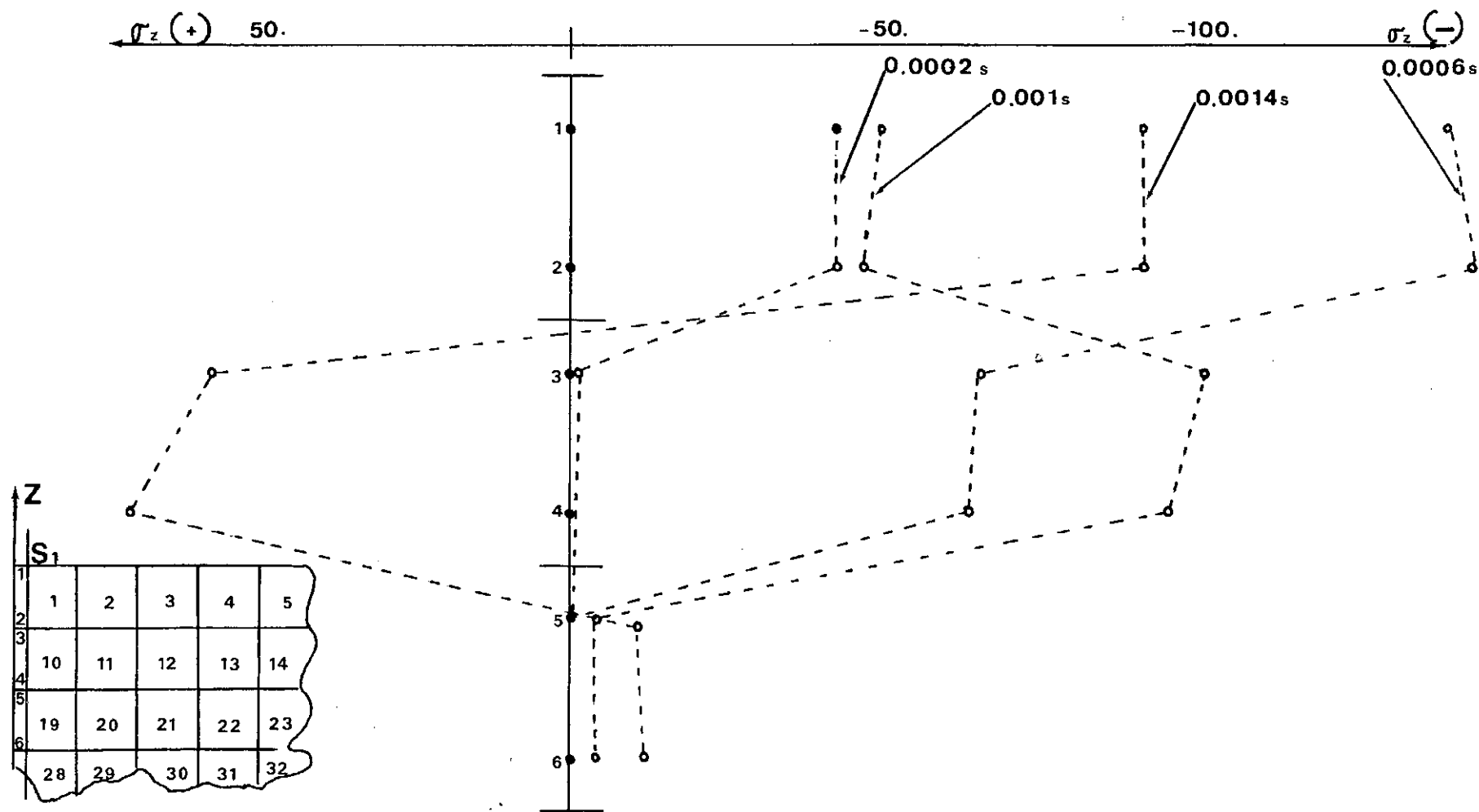


Fig. [7.32] Distribuição De Pressões Na Seção S_1 (Resp. Elástica/Sem Interface)

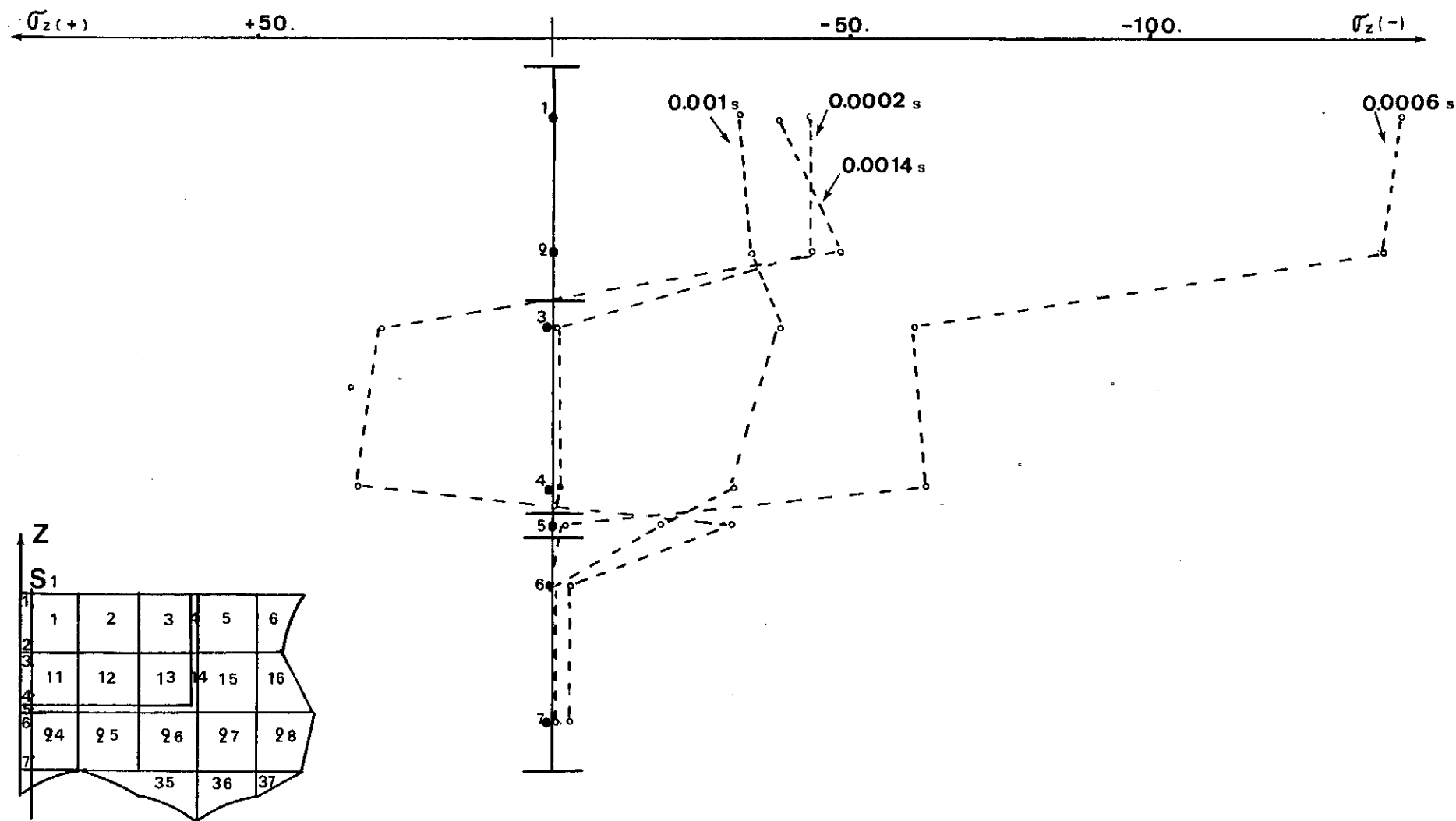
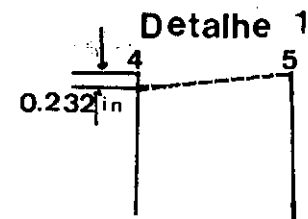
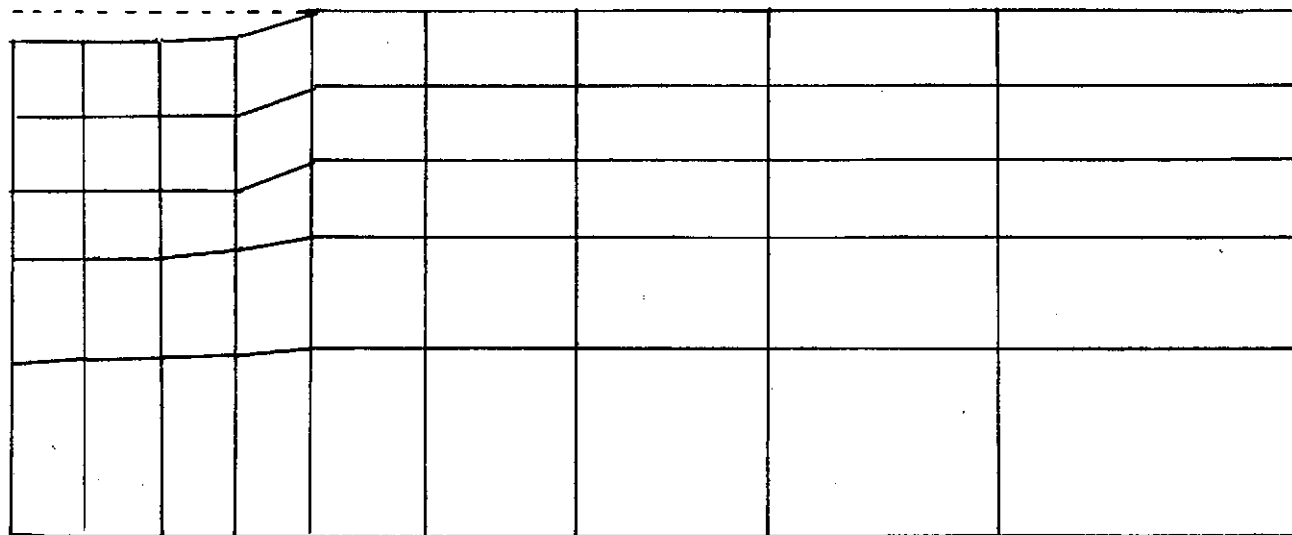


FIG. [7-33] DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÕES NA SEÇÃO S_1 (RESP. ELÁSTICA COM INTERFACE)

Sem Interface



Com Interface

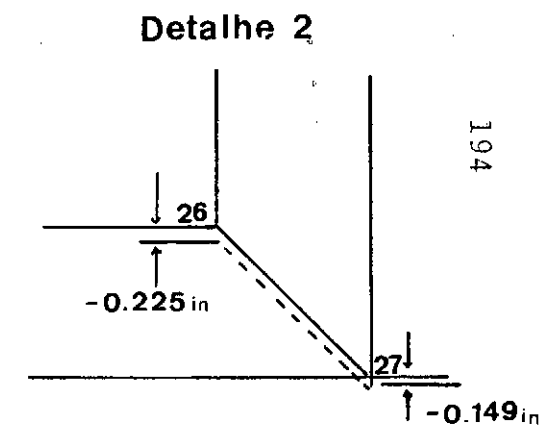
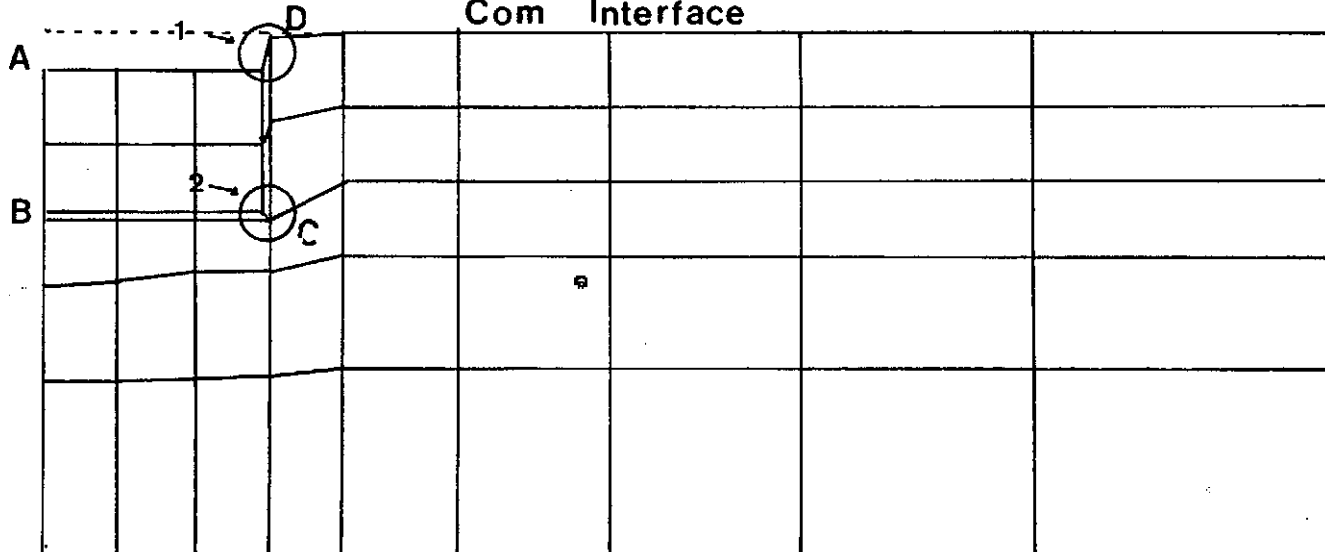
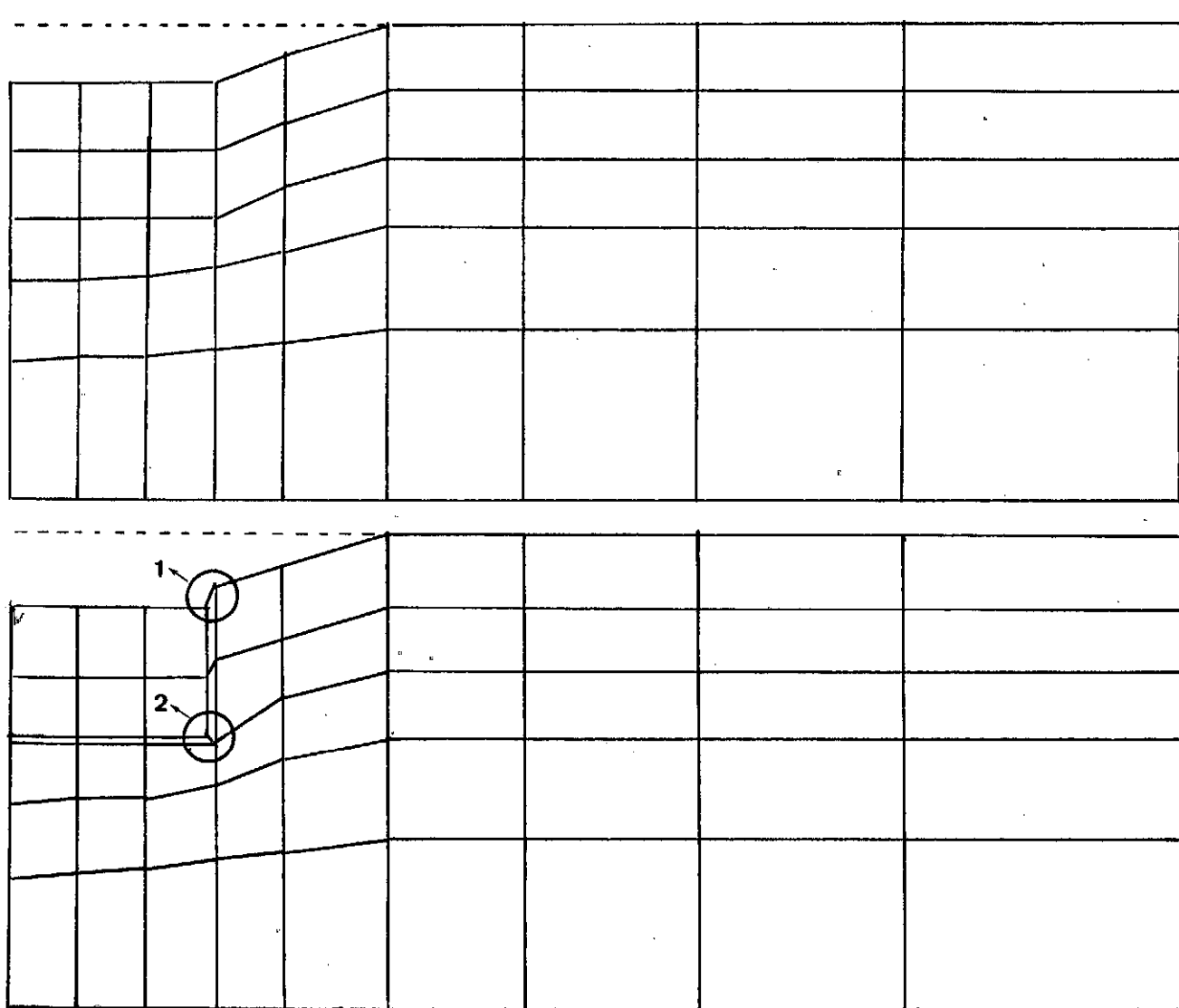
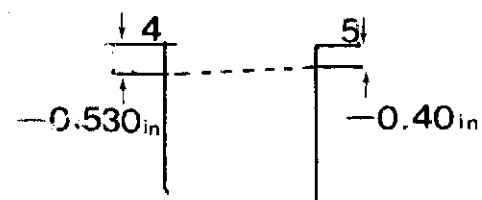


Fig. [7-34] Configuração para $t=0.01$ s (Resp. Elástica)



DeTalha 1



DeTalha 2

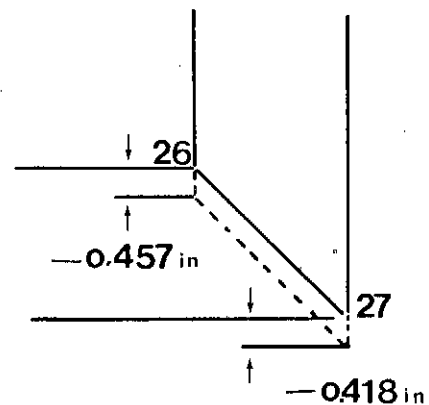


Fig. 7.35 Configuração para $t = 0.024$ (Resp. Elástica)

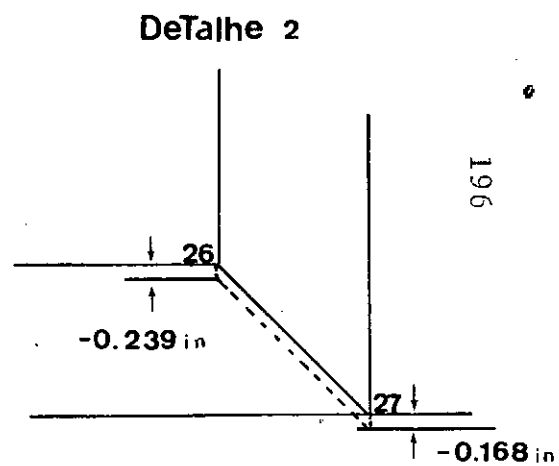
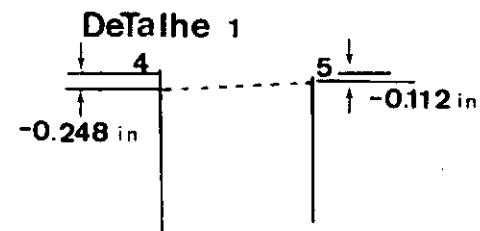
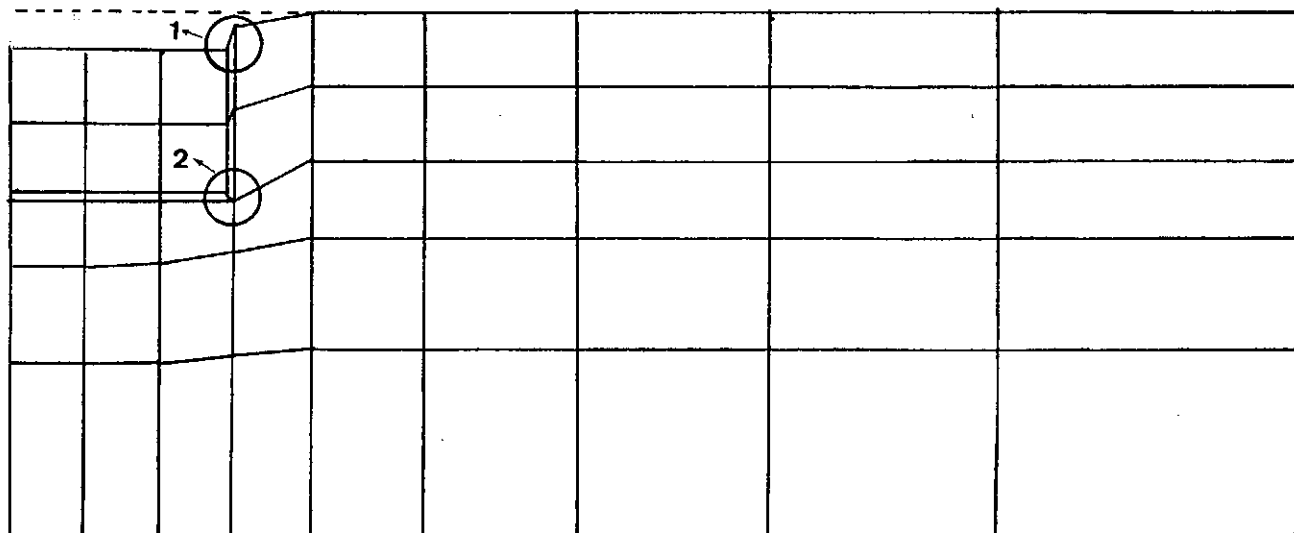
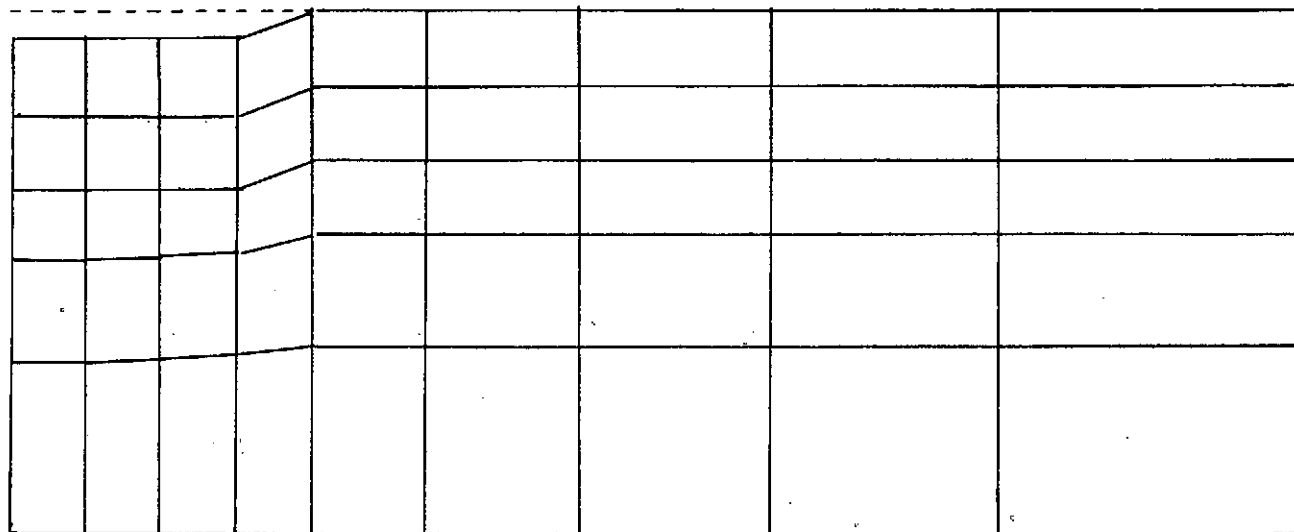
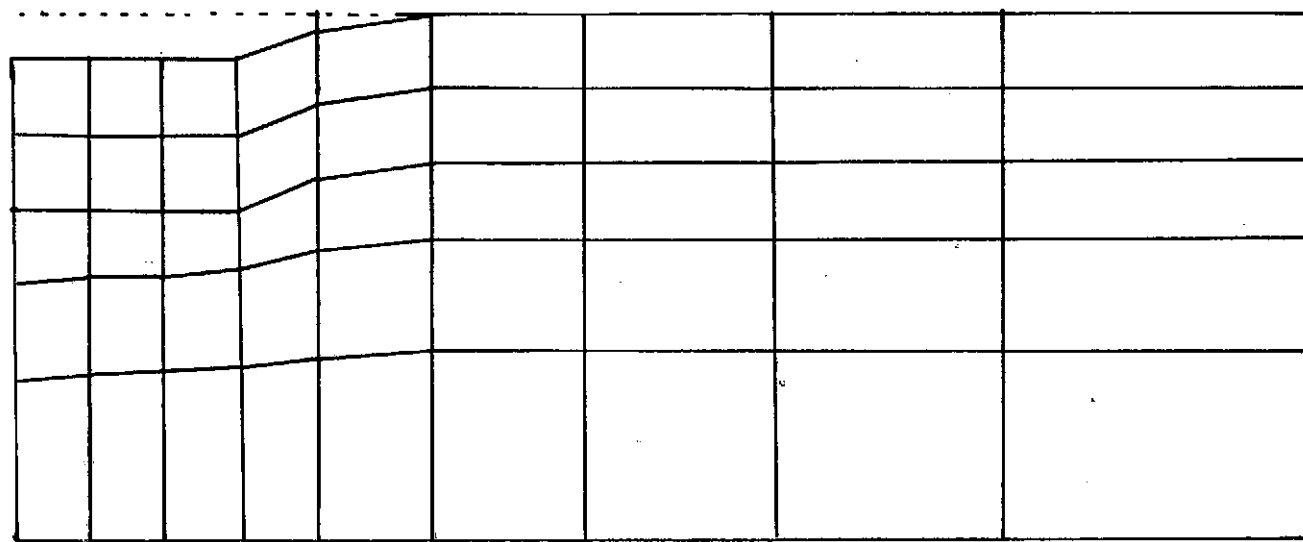
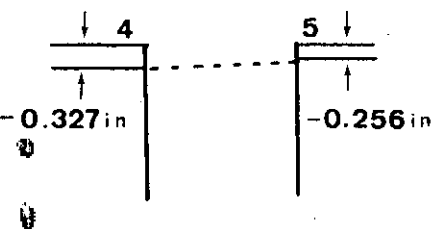


Fig. [7.36] Configuração para $T=0.064s$ (Resp. Elástica)



Detalhe 1



Detalhe 2

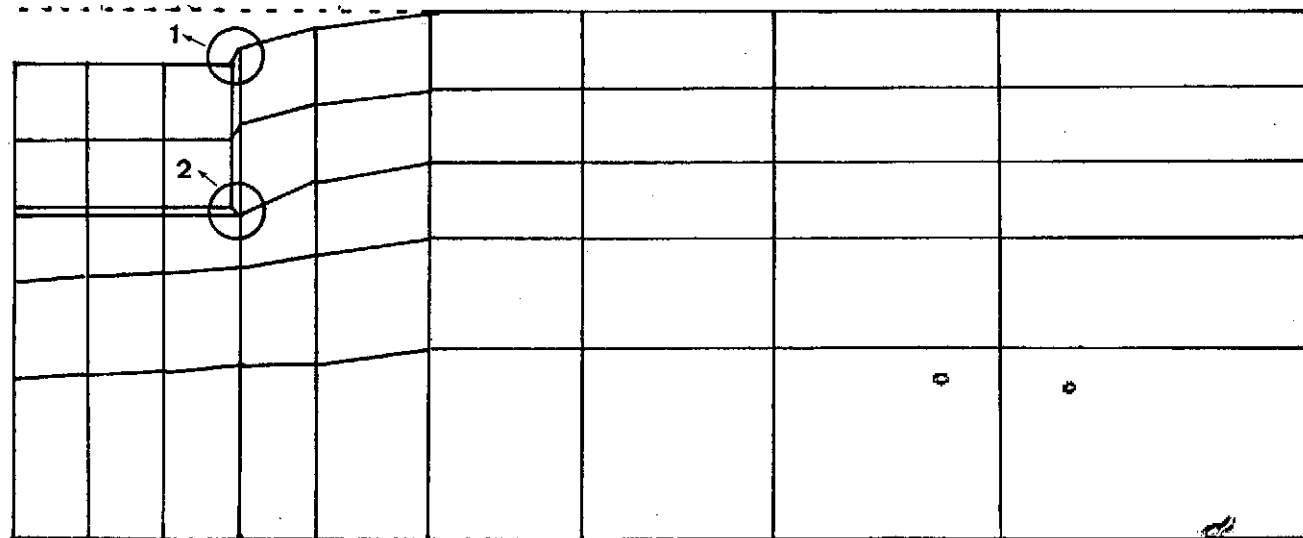
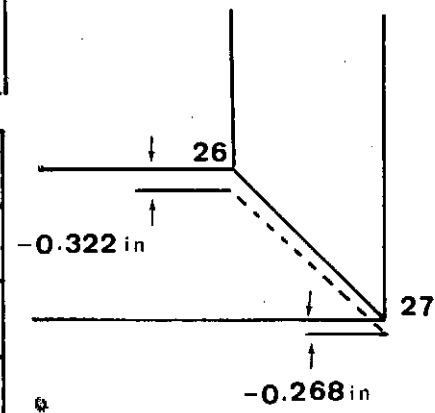


Fig. [7.37] Configuração para $t = 0.085$ s (Resp. Elástica)

Região Plastificada

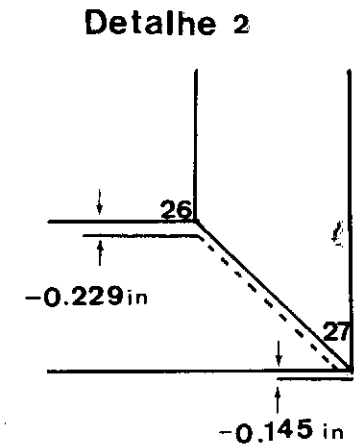
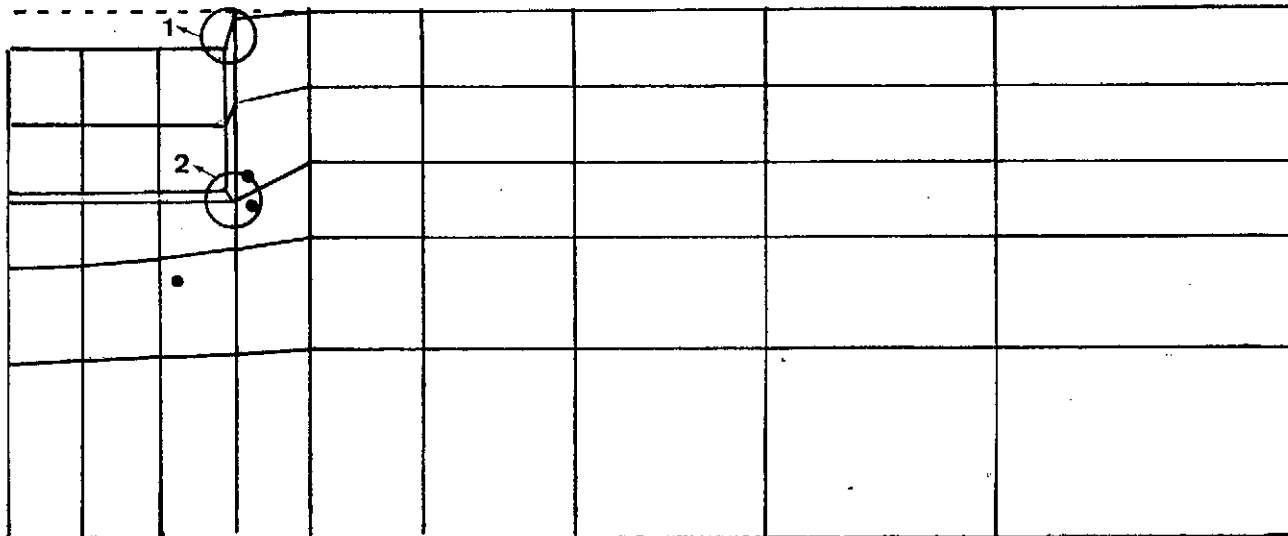
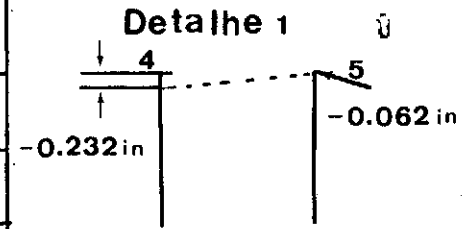
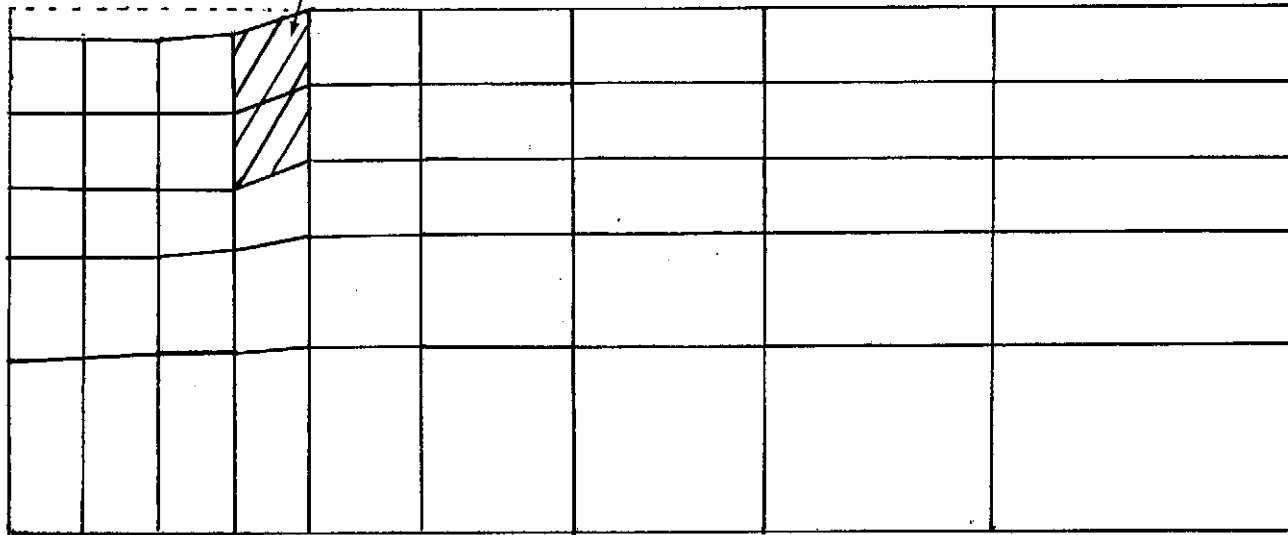


Fig.[7.38] Configuração Para $t=0.01 \text{ s}$ (Resp. Elasto—Plástica)

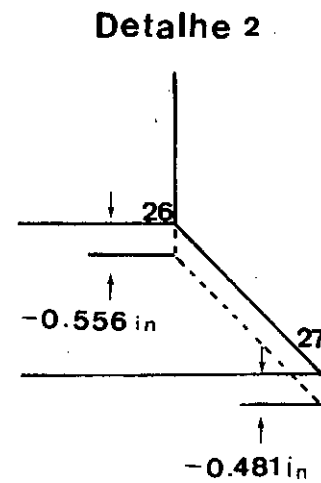
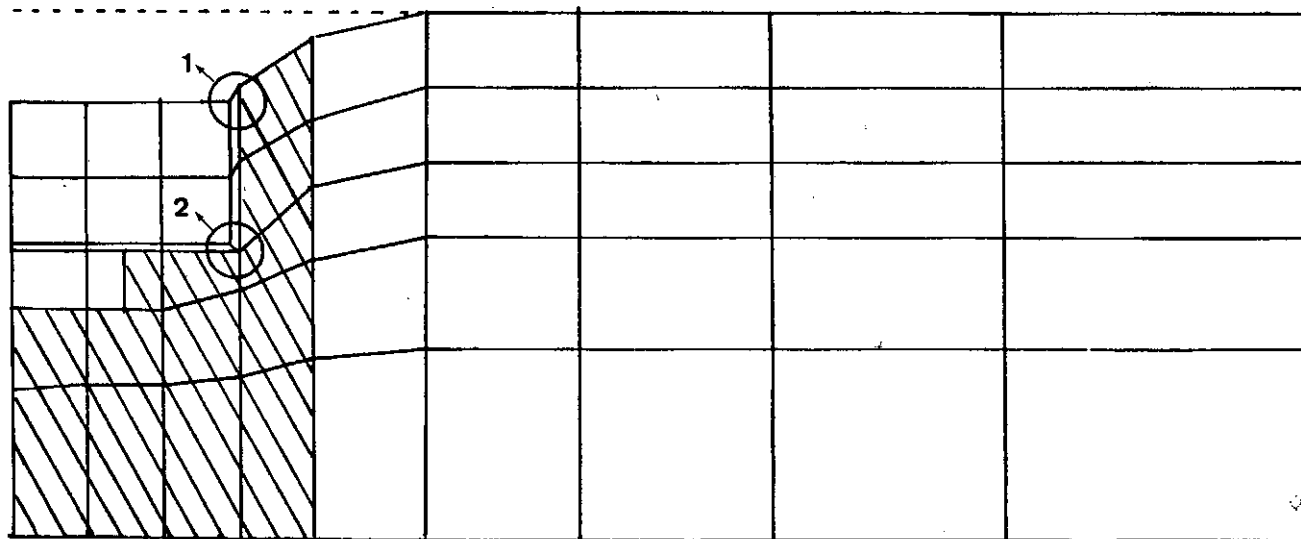
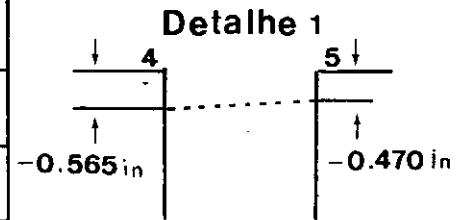
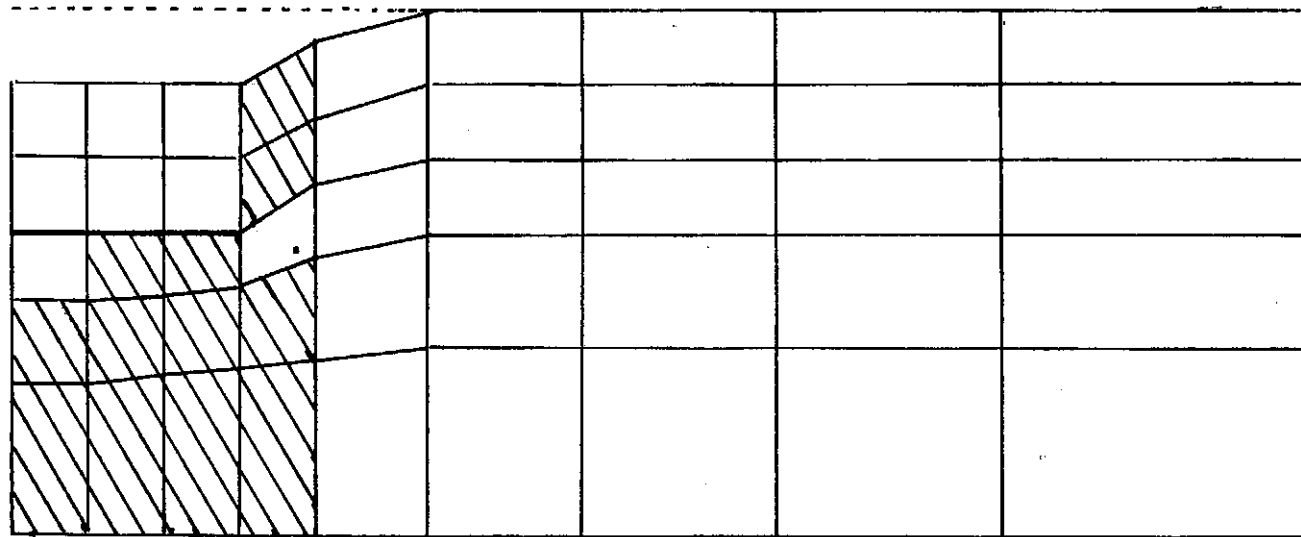


Fig. 7.39 Configuração para $t = 0.024 \text{ s}$ (Resp. Elasto-Plástica)

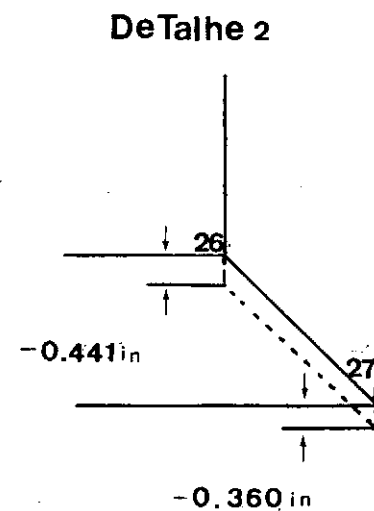
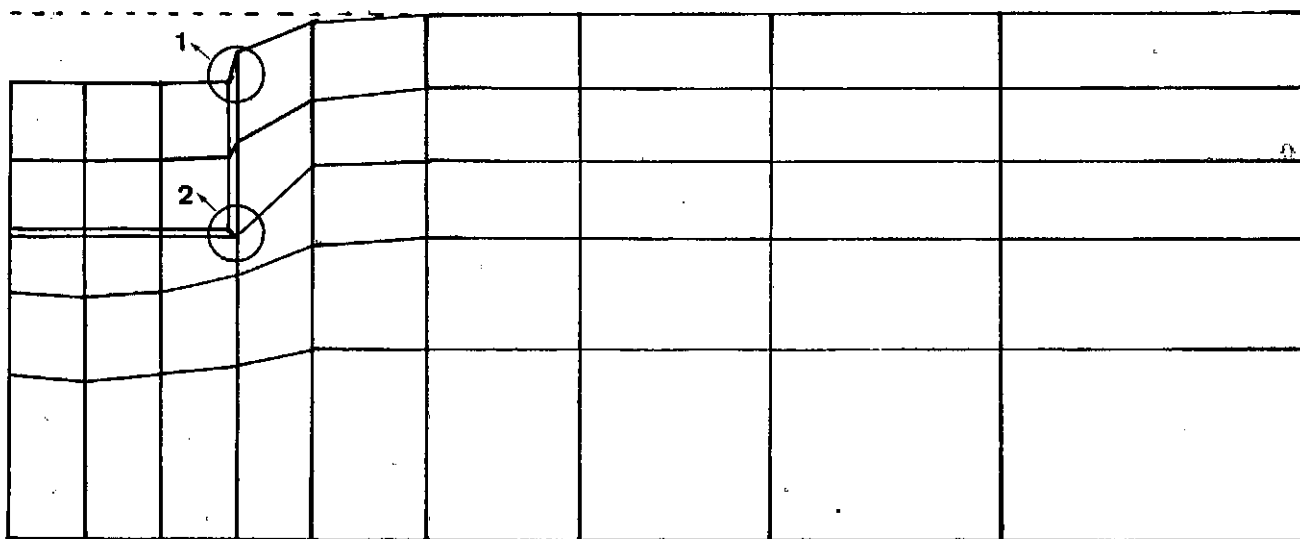
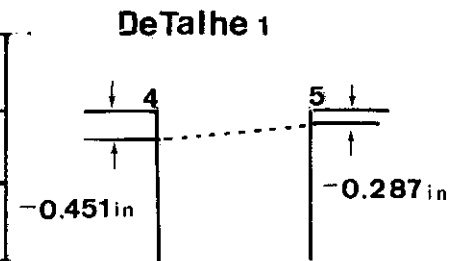
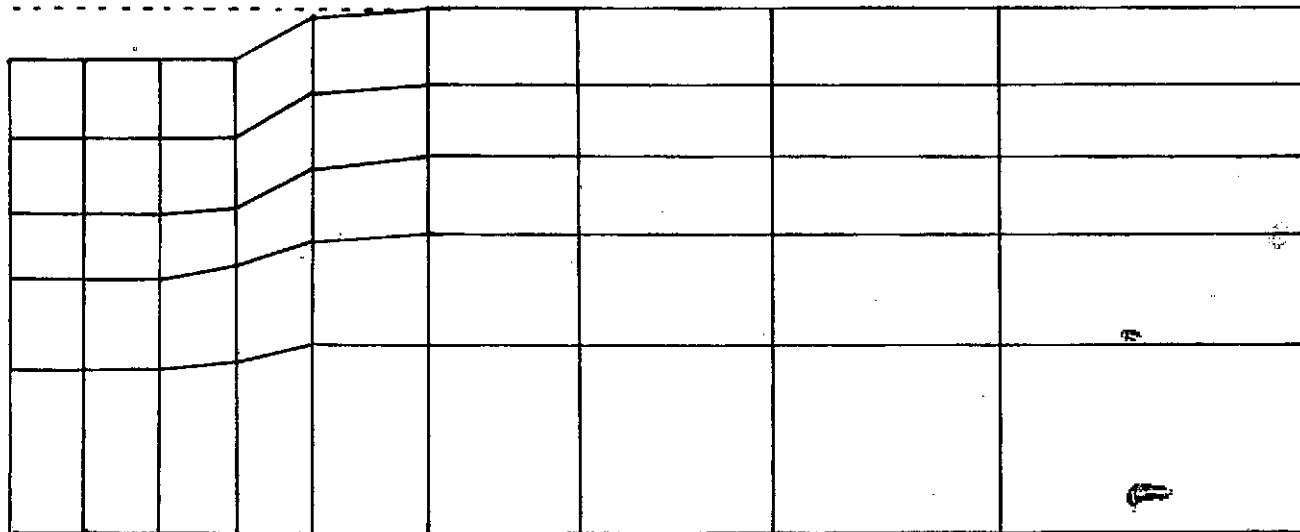
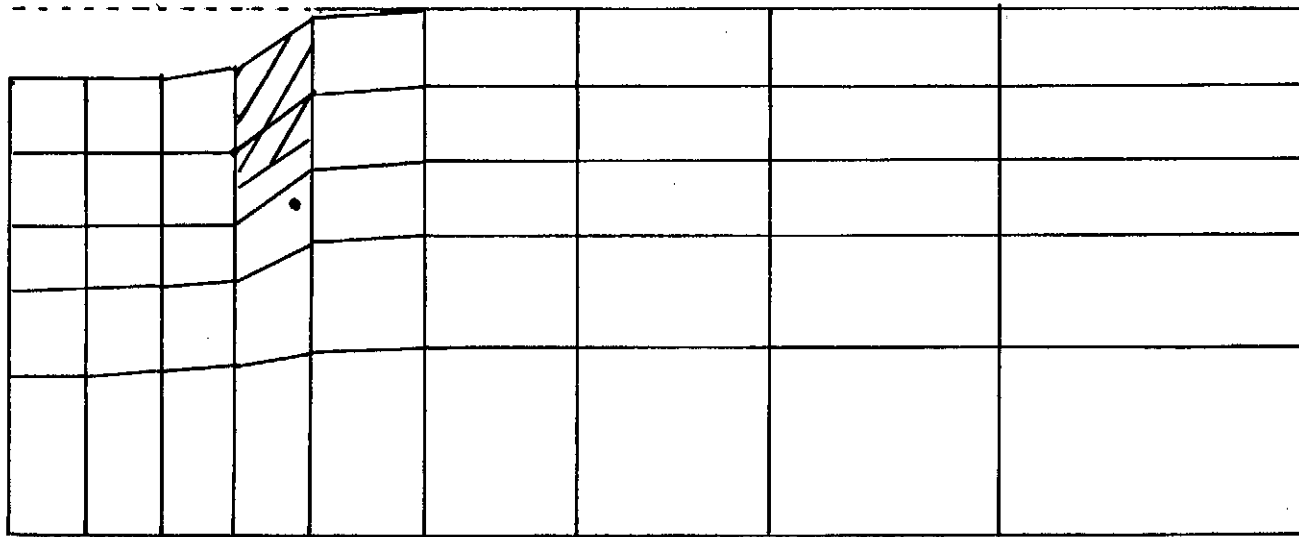
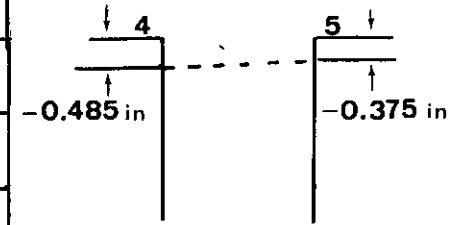


Fig. 7.40 Configuração Para $t=0.064$ s (Resp. Elasto—Plástica)



Detalhe 1



Detalhe 2

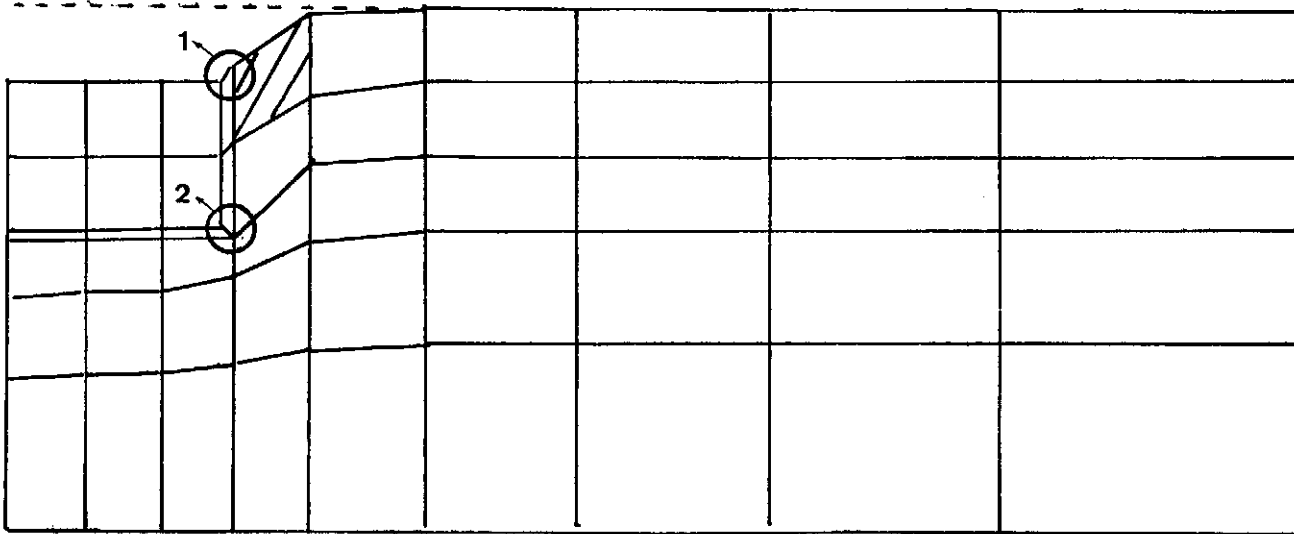
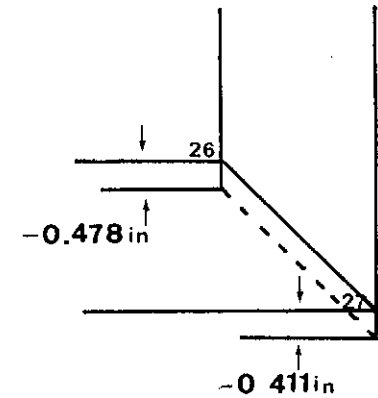


Fig. 7.4 □ Configuração para $t=0.085s$ (Resp. Elasto plástica)

VIII - CONCLUSÃO

A eficiência computacional de um método numérico não deve ser avaliada somente pelo esforço computacional envolvido na solução de alguns casos específicos. É necessário que outros aspectos sejam levados em conta, entre os quais pode-se citar:

- Facilidade de adaptações e ampliações futuras no corpo de programação
- Menor interferência do analista estrutural na minimização do esforço computacional
- Economia de memória
- Precisão de resultados, etc.

Dentro deste quadro o algoritmo de integração explícita de diferença central apresenta-se como um recurso numérico eficiente na análise não-linear dinâmica de estruturas em transientes de curta duração.

Observando-se apenas o esforço computacional, este algoritmo torna-se competitivo com os demais quando as características da análise preenchem os requisitos necessários de modo a estimular seu melhor desempenho. Em geral, grandes sistemas estruturais submetidos a solicitações súbitas, excepcionalmente elevadas e de curta duração, e que são significativamente influenciados no comportamento dinâmico pelos efeitos não-lineares, correspondem à faixa de maior emprego.

Frequentemente a análise não-linear de estruturas envolve um esforço computacional elevado, sobrecarregando sensivelmente o custo de processamento. Por este motivo, as programa

ções relacionadas a esta área de estudos devem dispor de esquemas lógicos que impeçam gastos desnecessários em processamentos falhos, originados por um conjunto diversificado de fatores. Em particular, no presente estudo, adaptou-se o recurso de "Re-start", o qual permite em instantes específicos da integração no tempo, interromper o processamento, mantendo em unidade de memória auxiliar todos os cálculos necessários à posterior continuação da integração.

Esta característica importante possibilita ao analista estrutural efetuar, em etapas, uma análise dinâmica não-linear de custos elevados, verificando o comportamento da estrutura, ou mesmo, o fornecimento incompatível de dados.

O processo de "Re-start" no algoritmo de diferença central não acarreta aumento significativo de esforço computacional e é de simples e rápida adaptação. É uma característica favorável à utilização desse algoritmo.

O resumo apresentado sobre os conceitos básicos do comportamento plástico de alguns materiais tem por finalidade fundamentar os modelos elasto-plásticos utilizados. Estes conceitos são indispensáveis à interpretação dos parâmetros necessários à formulação elasto-plástica e ao conhecimento dos limites de aplicabilidade, deficiências e hipóteses básicas de cada modelo.

O critério de escoamento de von Mises, devido à sua aplicação em materiais metálicos, pode ser considerado como o critério melhor conceituado e discutido, pois grande parte das publicações se dedicam ao comportamento plástico de metais. Além deste ponto favorável à sua utilização, é de simples formulação elasto-plástica permitindo que o modelo a ele associado seja mais facilmente implementado. Os critérios de escoamento de Mohr-Cou

lomb (Mod/Trad) introduzem algumas dificuldades no desenvolvimento dos modelos elasto-plásticos correspondentes, bem como abrangem o estudo de materiais de natureza física mais complexa.

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb Tradicional apresenta como dificuldade principal a existência de pontos singulares, o que implica na descontinuidade da formulação elasto-plástica e na acentuada deficiência do processo de atualização e correção do estado de tensões à superfície de escoamento. Em decorrência dessa condição insatisfatória, implementou-se o modelo elasto-plástico com base no critério de escoamento de Mohr-Coulomb Modificado, verificando o desempenho e as vantagens de sua utilização. Constata-se que este modelo reduz consideravelmente o esforço computacional ao mesmo tempo que atualiza o estado de tensões com grande precisão. Acredita-se que este critério, apoiado por uma análise experimental apropriada, serve como subsídio poderoso à análise elasto-plástica desses materiais pelo método dos elementos finitos.

Apesar de se ter contornado o problema relacionado ao tracionamento dos materiais associados aos critérios de Mohr-Coulomb é importante que estudos mais detalhados sejam motivados a analisar a influência da anulação do estado de tensões na estabilidade numérica do algoritmo e na redistribuição de tensões bem como na procura de um tratamento mais apropriado.

O esforço de pesquisa destinado à análise dinâmica não-linear de estruturas é sensivelmente elevado quando se considera em paralelo os efeitos da interação solo-estrutura-fluido. A sobrecarga de dificuldades engloba desde o desenvolvimento de modelos matemáticos compatíveis com os modelos físicos até a obtenção dos respectivos parâmetros físicos. Por este motivo, tra

tamentos simplificados são utilizados com frequência, permitindo assim uma envoltória árdua de análises e pesquisas.

No presente estudo a interação sólido-fluido segue idênticamente a sugestão fornecida na ref. [2.11]. Consegue-se com o respectivo modelo de fluido resultados satisfatórios quanto à propagação de ondas de compressão nesse meio. Será motivo de publicações futuras a análise da interação propriamente dita, com a implementação adicional de elementos "infinitos", para representar bacias de armazenamento em barragens (ref. [6.2]).

A escolha do elemento de junta na solução de problemas relacionados à interação solo-estrutura, surge como extensão de seu emprego em análises estáticas de maciços rochosos com fissuras (ref. [5.1]).

A simulação em laboratório do comportamento de uma junta ou fissura de modo a obter os respectivos parâmetros físicos já se encontra bem estabelecida (refs. 5.9, 5.10). O mesmo não se pode dizer sobre o comportamento de uma interface ou "contato solo-estrutura". Neste caso as dificuldades em se conseguir amostras representativas (ou mesmo em elaborar amostras artificiais e modelos reduzidos), são em muito acrescidas. Para amenizar tais dificuldades, um estudo paramétrico foi necessário, estabelecendo com segurança a influência dos parâmetros físicos na resposta dinâmica.

Embora o elemento de interface tenha sido extensamente testado, ao nível do modelo matemático, ressalta-se que sua implementação não é definitiva, necessitando uma investigação mais elaborada no que se refere à sua compatibilidade com o modelo físico e sua influência na estabilidade numérica do algoritmo.

Com os resultados obtidos pretende-se estimular o interesse em aplicar o algoritmo de integração explícita de diferença central na análise dinâmica de estruturas, incluindo além dos efeitos não-lineares discutidos, os provenientes de outras fontes, como não-linearidade geométrica, visco-plasticidade, plasticidade com lei de escoamento não associativa, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFIA - CAPÍTULO II

- 1 - MEIROVITCH, L.-"Elements of Vibration Analysis"--Mc-Graw-Hill Koyakusha, 1975.
- 2 - CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J.-"Dynamics of Structures" - Mc-Graw-Hill Koyakusha, 1975.
- 3 - COOK, R.D. - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" - John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- 4 - GALLAGHER, R.H. - "Finite Element Analysis Fundamentals" - Prentice-Hall, Inc. (1975).
- 5 - WASHIZU, K.-"Variational Methods in Elasticity and Plasticity"--Pergaman Press, 1974.
- 6 - PEI CHI CHOU; PAGANO, H.J.-- "Elasticity, Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches"--D. Von Nostrand Company, Inc., 1967.
- 7 - BATHE, K.J.; WILSON, E.L. - "Numerical Methods in Finite Element Analysis"--Prentice-Hall, Inc., 1976.
- 8 - BELYTSCHKO, T.; CHIAPETTA, R.L.; BARTEL, H.D. - "Efficient Large Scale Non-Linear Transient Analysis by Finite Elements" - International Journal for Numerical Methods in Engineering - Vol. 10, 579-596, 1976.
- 9 - EBECKEN, N.F.F. - "LORANE-NL - Uma Linguagem Orientada a Análise Estrutural Não-Linear"--Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Junho de 1977.
- 10 - SMITH, I.M. - "Transient Phenomena of Offshore Foundations" - Numerical Methods in Offshore Structures, Edited by O.C. Zienkiewicz; R.W. Lewis, K.G. Stagg; John Wiley & Sons, 1978.
- 11 - SHANTARAM, D.; OWEN, D.R.J.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Dynamic Transient Behaviour of Two and Three Dimensional Structures Including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 4, 561-578, 1976.

- 12 - BARBOSA, H.J.C.; COSTA, A.M.; EBECKEN, N.F.F.; FILHO, F. V. - "Métodos de Integração Direta para a Análise Dinâmica Não-Linear"-- XIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural - Santiago - Chile, abril de 1978.
- 13 - HINTON, E.; ROCK, T.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "A Note on Mass Lumping and Related Process in the Finite Element Method"-- Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol.4, 245-249, 1976.
- 14 - ZIENKIEWICZ, O.C. - "The Finite Element Method in Engineering Science"-- Mc Graw-Hill - London - 1971.
- 15 - CHANG, C.T.; HINTON, E.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Non-Linear Response of Structure - Fluid - Foundation Systems to Earthquake Excitation"-- Numerical Methods in Off-shore Engineering, Edited by O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis, K.G. Stagg, John Wiley & Sons, 1978.
- 16 - HINTON, E.; OWEN, D.R.J.; SHANTARAM, D. - "Dynamic Transient Linear and Nonlinear Behaviour of Thick and Thin Plates"-- The Mathematics of Finite Elements and Applications II MAFELAP 1975, J.R. Whiteman (ed), 423-438, Academic Press, London, 1977.
- 17 - BIFFLE, J.H.; BECKER, E.B. - "Finite Element Stress Formulation for Dynamic Elastic-Plastic Analysis"-- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 6, 101-119, 1975.
- 18 - BIFFLE, J.H.; KEY, S.W. - "Finite Element Formulations for Transient Dynamic Problems in Solids Using Explicit Time Integration"-- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 12, 323-336, 1977.
- 19 - LAMBE, T.W.; WHITMAN, R.V. - "Soil Mechanics"-- John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- 20 - FILONENKO, M.; BORODICH - "Theory of Elasticity"-- Mir Publishers, Moscow, 1968.

- 21 - LANDAU, L.; COSTA, A.M.; EBECKEN, N.F.F. -- "Resposta Dinâmica Não-Linear de Estruturas Sujeitas a Solicitações de Curta Duração" -- Conference on Structural Analysis, Design & Construction in Nuclear Power Plants, Porto-Alegre, RS, Brasil, 18-20, Abril de 1978.
- 22 - LANDAU, L.; COSTA, A.M.; EBECKEN, N.F.F. -- "Resposta Dinâmica de Estruturas Laminares de Materiais Elasto-Plásticos" -- XIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural - Santiago - Chile - Abril de 1978.

BIBLIOGRAFIA - CAPÍTULO III

- 1 - WILLIAMSON, R.E.; CROWELL, R.H.; TROTTER, H.F. - "Cálculo de Fundações Vetoriais" - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1975.
- 2 - HILL, R. - "The Mathematical Theory of Plasticity" - Oxford Univ. Press, London, 1950.
- 3 - MENDELSON, A. - "Plasticity, Theory and Application" - The Macmillan Co., New York, 1968.
- 4 - PRAGER, W. - "Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity" - Journal of Applied Physics, Vol. 20, No. 3, 235-241, 1949.
- 5 - BLAND, D.R. - "The Associated Flow Rule of Plasticity" - Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 6, pp. 71-78, 1957.
- 6 - DRUCKER, D.C. - "Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity" - Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 7, 411-418, 1950.
- 7 - PRAGER, W. - "Strain Hardening Under Combined Stresses" - Journal of Applied Physics, Vol. 16, 837-840, 1945.
- 8 - DRUCKER, D.C. - "On Uniqueness in the Theory of Plasticity" - Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 14, 35-42, 1956.
- 9 - DRUCKER, D.C. - "A Definition of Stable Inelastic Material" - Journal of Applied Mechanics, Vol. 26, 101-106, 1959.
- 10 - DRUCKER, D.C. - "Limit Analysis of Two and Three Dimensional Soil Mechanics Problems" - Journal of the Mechanics and physics of Solids - Vol. 1, 217-226, 1953.
- 11 - DRUCKER, D.C.; PRAGER, W. - "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design" - Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 10, Nº 10, pp. 157-165, 1952.
- 12 - DRUCKER, D.C.; PRAGER, W. - "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media" - Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 9, 381-389, 1952.

- 13 - DRUCKER, D.C.; GIBSON, R.E.; HENKEL, D.J. - "Soil Mechanics and Work Hardening Theories of Plasticity" - Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. 81, Transactions Am. Soc. Civ. Engrs. 122, 338-346, 1957.
- 14 - KOITER, W.T. - "Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with a Singular Yield Surface" - Quarterly of Applied Mathematics - Vol. 11, 350-354, 1953.
- 15 - TAYLOR, G.I.; GUINNEY, H. - "The Plastic Distortion of Metals" - Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A. Math. and Physical Sciences, Vol. 230, 323-362, 1931.
- 16 - KACHANOV, L.M. - "Fundamentals of the Theory of Plasticity" - Mir Publishers, 1974.
- 17 - FUNG, Y.C. - "Foundations of Solid Mechanics" - Prentice-Hall International Series in Dynamics, 1965.
- 18 - MALVERN, L.E. - "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium" - Prentice-Hall Series in Engineering of the Physical Sciences, 1969.
- 19 - NOVOZHILOV, V.V. - "Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity" - Graylock Press, Rochester, N.Y., 1953.
- 20 - DUFFY, J.; MINDLIN, R.D. - "Stress-Strain Relations and Vibrations of a Granular Medium" - J. Appl. Mech., Vol. 24 585-593, 1957.
- 21 - KWASCZYNSKA, K.; MROZ, Z; DRESCHER, A. - "Analysis of Compression of Short Cylinders of Coulomb Material" - Intl. J. Mechanical Science, 11, 145-158, 1969.
- 22 - HENCKY, H. - "Zeits. Ang. Math. Mech.", Vol. 4, 323, 1924.
- 23 - SHIELD, R.T. - "On Coulomb's Law of Failure in Soils" - Journal of the Mechanical and Physics of solids, vol. 4, 10-16, 1955.
- 24 - LADE, P.V. - "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces" - Report to the National Science Foundation Grant N° GK 37445.

- 25 - SPIEGEL, M.R. --"Manual de Formulas e Tabelas Matemáticas"-- Coleção Schaum, traduzido por Roberto Chioccarello , Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda., 1977.
- 26 - ZIENKIEWICZ, O.C.; PANDE, G.N. --"Some Useful Forms of Isotropic Yield Surfaces and Rock Mechanics"-- Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. Gudehus, John Wiley & Sons, 1977.
- 27 - PRAGER, W.; HODGE, P.G. - "Theory of Perfectly Plastic Solids" - New York, John Wiley & Sons, Inc., 1951.
- 28 - DRUCKER, D.C. --"The Significance of the Criterion for additional Plastic Deformation of Metals" - Journal of Colloid Science - Vol. 4, No. 3, 299-309, 1949.
- 29 - HOUWINK, R. --"Elasticity, Plasticity & Structure of Matter" - Dover Publications, Inc., 1958.
- 30 - HANDELMAN, G.H.; LINS, C.C.; PRAGER, W. --"On the Mechanical Behaviour of Metals in the Strain-Hardening Range" - Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 4, 397-407, 1947.

BIBLIOGRAFIA - CAPÍTULO IV

- 1 - ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPPAN, S.; KING, I.P. - "Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems Initial Stress, Finite Element Approach" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, 75-100, 1969.
- 2 - NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 113-135, 1972.
- 3 - MARCAL, P.V.; KING, I.P. - "Elastic-Plastic Analysis of Two Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method" - International Journal of Mechanical Science, Vol. 9, 143-155, 1967.
- 4 - YAMADA, Y.; YOSHIMURA, N.; SAKURAI, T. - "Plastic Stress-Strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic - Plastic Problems by the Finite Element Method" - Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 343-354, 1968.
- 5 - NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Convenient Form of Stress Invariants for Plasticity" - Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98 - No. ST4, April, 1972.
- 6 - STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E. - "Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis" - Computer & Structures, Vol. 7, 125-136, 1977.
- 7 - ZIENKIEWICZ, O.C.; HUMPHESON, C.; LEWIS, R.W. - "Associated and Non-Associated Visco-Plasticity and Plasticity in Soil Mechanics" - Géotechnique 25, No. 4, 671-689, 1975.
- 8 - PRÉVOST, J.H.; HÖEG, K. - "Soil Mechanics and Plasticity Analysis of Strain Softening" - Géotechnique 25, No. 2, 279-297, 1975.
- 9 - ZIENKIEWICZ, O.C.; CORMEAU, I.C. - "Visco-Plasticity-Plasticity and Creep in Elastic Solids - A Unified Nume-

rical Solution Approach" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8, 821-845, 1974.

- 10 - ZIENKIEWICZ, O.C.; HUMPHESON, C.; LEWIS, R.W. - "Associated and Non-Associated Visco-Plasticity and Elasticity in Soil Mechanics" - Geotechnique, Vol. 25, No. 4, 671-689, 1975.
- 11 - WILSON, E.L.; FARHOOBAND, I.; BATHE, K.J. - "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 241-252, 1973.
- 12 - ZIENKIEWICZ, O.C.; HUMPHESON, C.; LEWIS, R.W. - "A Unified Approach to Soil Mechanics Problems (Including Plasticity and Visco-Plasticity)" - Finite Element in Geomechanics, Edited by G. Gudehus, John Wiley & Sons, 1977.
- 13 - LANDAU, L. - "Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Isoparamétricos" - Tese M.Sc. COPPE, 1976.

BIBLIOGRAFIA - CAPÍTULO V

- 1 - GOODMAN, R.E.; TAYLOR, R.L.; BREKKE, T.L. - "A Model for the Mechanics of Jointed Rock" - Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, SM3, 637-659, May 1968.
- 2 - GHABOUSSI, J.; WILSON, E.L.; ISEMBERG, J. - "Finite Element for Rock Joints and Interfaces" - Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, SM10, 833-847, 1973.
- 3 - DESAI, C.S. - "Soil-Structure Interaction and Simulation Problems" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.
- 4 - SMITH, I.M. - "Some Time - Dependent Soil - Structure Interaction Problems" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.
- 5 - WILSON, E.L. - Finite Elements for Foundations, Joints and Fluids" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.
- 6 - GOODMAN, R.E. - "Analysis in Jointed Rocks" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.
- 7 - DESAI, C.S.; ABEL, J.F. - "Introduction to the Finite Element Method. A Numerical Method for Engineering Analysis" - Von Nostrand Reinhold Company, 1972.
- 8 - ZIENKIEWICZ, O.C. et all - "Analysis of Nonlinear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems" - Proceedings of the 2nd Congress of the International Society for Rock Mechanics, Belgrade, Yugoslavia, 1970.
- 9 - BARTON, N.R. - "A Model Study of Rock-Joint Deformation" - International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 9, Nº 5, 1972.
- 10 - GOODMAN, R.E.; DUBOIS, J. - "Duplication of Dilatancy in Analysis of Jointed Rocks" - Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 98, No.

SM4, Proc. Paper, 399-422, April, 1972.

- 11 - LUCO, J.E.; HADJIAN, A.H. - "Two-Dimensional Approximations to the Three-Dimensional Soil-Structure Interaction Problem" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 31, 195-203, 1974.
- 12 - SCAVUZZO, R.J.; RAFTOPOULOS, D.D. - "A Review of Soil - Structure Interaction Effects in the Seismic Analysis of Nuclear Power Plants" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 28, 400-413, 1974.
- 13 - CONSTANTINO, C.J.; MILLER, C.A. - "Soil-Structure Interaction Parameters from Finite Element Analysis" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 38, 289-302, 1976.
- 14 - WOLF, J.P. - "Soil-Structure Interaction with Separation of Base Mat from Soil" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 38, No. 2, 357-384, August, 1976.
- 15 - LYSMER, J.; UDAKA, T.; TSAI, E.; CHAN and SEED, H.B. - "Flush - A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems" - U.S. Department of Commerce, National Technical Information Service, PB-259332.
- 16 - LEE, T.H.; WESLEY, D.A. - "Soil-Structure Interaction of Nuclear Reactor Structures Considering Through - Soil Coupling Between Adjacent Structures" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 24, 374-387, 1973.

BIBLIOGRAFIA - CAPÍTULO VI

- 1 - NAHAVANDI, A.N.; BOHM, G.J.; PEDRIDO, R.R. - "Structural Compatible Fluid Finite Element for Solid-Fluid Interaction Studies" - Nuclear Engineering and Design , Vol. 35, 335-347, 1975.
- 2 - SAINT, S.S.; BETTESS, P.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 6, 363-374, 1978.
- 3 - CHAKRABARTI, P.; CHOPRA, A.K. - "Earthquake Response of Gravity Dams Including Reservoir Interaction Effects" - Report No. EERC 72-6, Univ. of California, Berkeley October, 1973.
- 4 - LIAW, C.Y.; CHOPRA, A.K. - "Earthquake Response of Axisymmetric Tower Structures Surrounded by Water" - Report No. EERC 73-25, Univ. of California, Berkeley, October, 1973.
- 5 - BINDER, R.C. - "Fluid Mechanics" - Prentice Hall of India 1964.
- 6 - FEGHALI, J.P. - "Mecânica dos Fluidos" - Dinâmica Vol. 2, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1974.
- 7 - LIAW, C.Y.; CHOPRA, A.K. - "Dynamics of Towers Surrounded by Water" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3, 33-49, 1974.
- 8 - LIAW, C.Y.; CHOPRA, A.K. - "Earthquake Analysis of Axisymmetric Towers Partially Submerged in Water" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, 233-248, 1975.
- 9 - CHAKRABARTI, P.; CHOPRA, A.K. - "Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Hydrodynamics Interaction" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, 143-160, 1973.

BIBLIOGRAFIA - CAPÍTULO VII

- 1 - NAGARAJAN, S.; POPOV, E.P. - "Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Axisymmetric Solids" - Computer & Structures, Vol. 4, 1117-1134, 1974.
- 2 - DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.P. - "Prédiction of the Nonlinear Dynamic Response of Structural components Using Finite Elements" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 37, 95-114, 1976.
- 3 - MA, S.M.; BATHE, K.J. - "On Finite Element Analysis of Pipe Whip Problems" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 37, 413-430, 1976.
- 4 - ZIENKIEWICZ, O.C.; NORRIS, V.A.; WINNICKI, L.A.; NAYLOR, D.J.; LEWIS, R.W. - "A Unified Approach to the Soil Mechanics Problems of Offshore Foundations" - Numerical Methods in Offshore Engineering, Edited by Zienkiewicz, O.C.; Lewis, R.W. Stagg, K.G., John Wiley & Sons, 1978.
- 5 - ANDERSEN, K.H.; HANSTEEN, O.E.; HOEG, K.; PREVOST, J.H. - "Soil Deformations Due to Cyclic Loads on Offshore Structures" - Numerical Methods in Offshore Engineering, Edited by Zienkiewicz, O.C.; Lewis, R.W.; Stagg, K.G.; John Wiley & Sons, 1978.
- 6 - BATHE, K.J.; WILSON, E.L.; LIDING, R. - "-NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear System" - Report No. UCSESM 74-3, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1974.
- 7 - NAGARAJAN, S.; POPOV, E.P. - "Non-Linear Finite Element Dynamic Analysis of Axisymmetric Solids" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3, 385-399, 1975.